Z–transformácia / slovník Z–transformácie

Z–transformácia je matematický aparát, ktorý využívame predovšetkým pri popise, analýze i syntéze diskrétnych regulačných systémov. Má tu rovnakú funkciu ako Laplaceova transformácia pri spojitých systémoch.

Laplaceov obraz spojitej funkcie $f(t)$ je daný vzťahom (5)

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Ak vzorkujeme túto funkciu vzorkovačom s periódou T dostaneme diskrétnu funkciu $f(kT)$ a jej Laplaceov obraz získame rovnako, ale musíme prejsť od integrálu k sume

$$L\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT} \qquad (5.3)$$

Ak zavedieme novú premennú „z" vzťahom

$$z = e^{sT} \qquad (5.4)$$

definuje nám tento vzťah Z–obraz (na pravej strane zmizlo s, je to funkcia novej premennej z)

$$\boxed{\boldsymbol{F(z) = Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \ \dots}} \qquad (5.5)$$

Z–obraz definovaný týmto vzťahom je iba pre diskrétne funkcie a nemožno ho použiť pre spojité funkcie.

Rovnako ako pri Laplaceovej transformácii sa výpočet Z–obrazov nevykonáva výpočtom podľa definičného vzťahu (5.5), ale sa používa slovník Z–transformácie. V slovníku Z–transformácie sú obdobne ako v slovníku Laplaceovej transformácie diskrétne funkcie $f(kT)$ a príslušný Z–obraz $F(z)$. Ale súčasne tam sú v jednom riadku tiež zodpovedajúca spojitá funkcia $f(t)$, z ktorej sa vzorkovaním diskrétna funkcia získala a jej Laplaceov obraz $F(s)$. To je často veľmi užitočné. Taký základný slovník je v tab. 5.1.

Slovník LT a ZT tých najdôležitejších a najpoužívanejších funkcií tab. 5.1

	$f(t)$	$F(s)$	$f(kT)$	$F(z)$
1	$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	1
2	$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\eta(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
4	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{z(z+1)T^2}{2(z-1)^3}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{zTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
7	$a^{\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s-\frac{\lg a}{T}}$	a^k	$\frac{z}{z-a} \quad (a>0)$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega kT$	$\frac{z^2 - z\cos \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}$

Pri spätnej transformácii hľadáme k danému obrazu $F(z)$ originál, teda diskrétnu časovú funkciu $f(kT)$ a toto symbolicky vyjadrujeme zápisom $\boldsymbol{f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\}}$