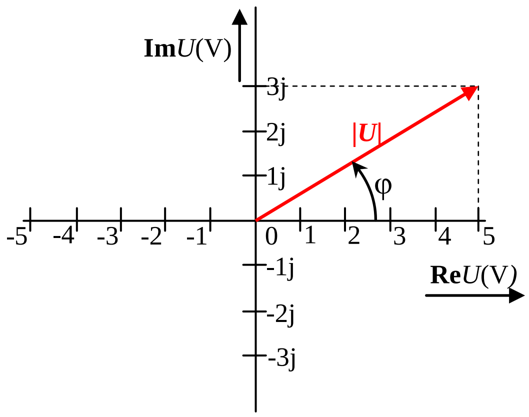
Pri riešení regulačných obvodov sa nezaobídeme bez znalostí niektorých disciplín vyššej matematiky. Zopakujme, resp. zoznámme sa teda s niektorými operáciami v rozsahu nutnom pre zvládnutie danej odbornej problematiky.

Komplexné čísla

Reálne čísla môžeme zobraziť na číselnej, tzv. *reálnej* osi. Reálna os postačí pre znázornenie kladných alebo záporných čísiel od nuly. Nestačí však už na zobrazenie vektorov, stačí iba na určenie ich absolútnych hodnôt. *Vektor* je určený nielen absolútnou veľkosťou (modul alebo amplitúda), ale aj fázovým uhlom (argumentom), ktorý daný vektor zviera s kladnou časťou reálnej osi. Vektor môžeme znázorniť v ***komplexnej rovine***, obr. 1.



Obr. 1: Fázor napätia v komplexnej rovine

Obrázok, ako príklad, reprezentuje vektor napätia. Namiesto vektor je správnejšie označovať *fázor* napätia. Predstavujeme si ho tak, že sa otáča proti smeru hodinových ručičiek stálou uhlovou rýchlosťou $\omega = 2\pi f$, kde *f* je frekvencia napätia. Veľkosť vektora je určená jeho absolútnou hodnotou resp. modulom (amplitúdou) $|U|$, fázovým posunom (oproti fázoru prúdu, ktorý je umiestnený do reálnej osi), je znázornený uhlom φ. Uhol φ je stály, pretože fázor napätia a prúdu rotujú rovnakou rýchlosťou.

Komplexná rovina je určená reálnou číselnou osou, na ktorú vynášame reálne čísla a tzv. ***imaginárnou číselnou osou***, ktorá s reálnou zviera uhol 90º. Jednotka vynášaná na imaginárnej osi je tzv. ***imaginárna jednotka***, ktorú označujeme symbolom ***j*** (v matematike *i*).

Vektor ***U*** môžeme ako komplexné číslo rozložiť na *zložku reálnu* Re***U*** (tu Re***U***=5V) a *zložku imaginárnu* Im*U* (tu Im***U***=3V). Závislosť medzi zložkami vektora, jeho amplitúdou a jeho fázovým posunom určujú vzťahy pre pravouhlý trojuholník so stranami Re***U*** a Im***U*** a |***U***|, t.j. Pytagorova veta a goniometrické funkcie.

$$|U| = \sqrt{(ReU)^2 + (ImU)^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{ImU}{ReU}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{ImU}{ReU}$$

$$ReU = |U|\cos\varphi$$

$$ImU = |U|\sin\varphi$$

Komplexné číslo je pomocou svojich zložiek vyjadrené napríklad takto

$$U = ReU + jImU$$

Niekedy sa pre vyjadrenie komplexného čísla používa jeho *exponenciálny tvar*.

$$U = |U|e^{j\varphi}$$

Konštanta $e \approx 2{,}72$ je základ prirodzeného logaritmu.

Ak násobíme ktorúkoľvek veličinu znázornenú vektorom v komplexnej rovine imaginárnou jednotkou *j*, otočíme tým vektor o 90º okolo počiatku súradníc v kladnom zmysle (proti smeru hodinových ručičiek). Ak násobíme reálne číslo imaginárnym, výsledok je imaginárny.

Vynásobením dvoch imaginárnych jednotiek dostaneme reálnu jednotku so záporným znamienkom. Ďalšie násobenie imaginárnym číslom znamená ďalšie otočenie o 90º.

$$jj = j^2 = -1$$
$$j^3 = -j$$
$$j^4 = 1$$
$$j^5 = j$$

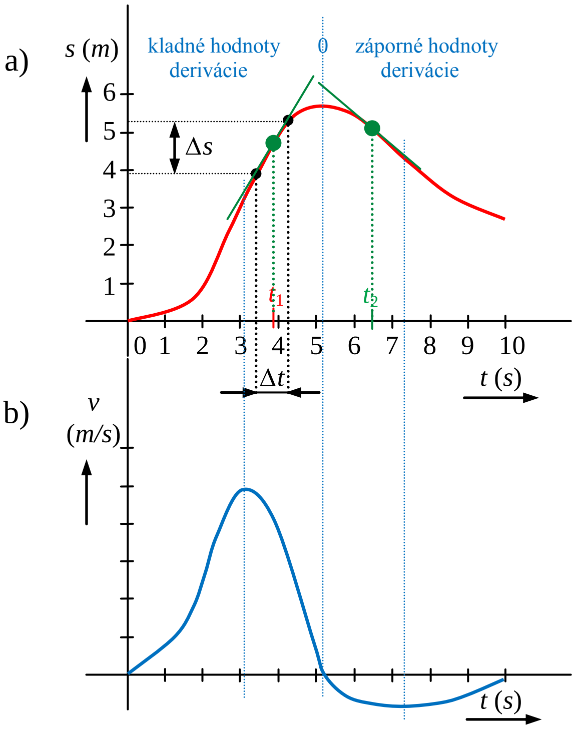
atď.

Derivácia časovej funkcie

Pri určovaní vlastností dynamických členov skúmame ich prechodové javy, ktoré sú dané závislosťou rôznych veličín na čase, teda *časovými funkciami*. Časovú funkciu môžeme vyjadriť *graficky* ale tiež *matematicky*. Priebeh časovej funkcie je potom určený rovnicou, ktorá v zložitejších prípadoch obsahuje *derivácie* prípadne *integrály*. Nazývame ju ***diferenciálnou rovnicou***.

Fyzikálnu podstatu ***derivácie*** si môžeme predstaviť napríklad na závislosti dráhy na čase pri nerovnomernom pohybe. Na obr. 2a) je funkcia $s = s(t)$ znázornená krivkou, ktorej strmosť ukazuje, ako rýchlo sa prejdená dráha menila v čase. V ľubovoľnom čase môžeme z grafu vyjadriť veľkosť okamžitej rýchlosti. V okolí zvoleného času t_1 si zvolíme malý prírastok času. Na osi dráhy potom odčítame príslušný prírastok dráhy. Okamžitú rýchlosť potom vyjadríme vzťahom

$$v_1 \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Obr. 2:
a) podstata derivácie, b) grafická derivácia

Chyba je tým väčšia, čím je väčší zvolený prírastok času a čím je väčšia nelineárnosť danej časovej funkcie. Aby sme zväčšili presnosť, zmenšujeme časový prírastok, napríklad polením. Ak vykonáme toto zmenšovanie neobmedzene, dostaneme sa do stavu, kedy sa veľkosť obidvoch prírastkov blíži nule. Takýto prírastok potom nazývame ***diferenciálom***. Pre diferenciál používame symbol ***d***. Výpočet rýchlosti v čase t_1 použitím diferenciálu je už úplne presný.

$$v_1 = \frac{ds}{dt}$$

Uvedený výraz určuje deriváciu dráhy podľa času, skrátene ho čítame „ds podľa dt“. ***Fyzikálnou podstatou prvej derivácie*** je teda ***okamžitá rýchlosť*** zmeny hodnoty derivovanej veličiny meniacej sa v čase. Ak je veličina konštantná, je rýchlosť jej zmeny nulová a nulová je i jej derivácia. Ak derivujeme danú časovú funkciu bod po bode, získame časový priebeh jej zmeny resp. derivácie ako funkciu času, v našom prípade je to $v(t)$ obr. 2b). Rýchlosť, ako funkciu času môžeme opäť derivovať, čím získame „rýchlosť zmeny rýchlosti“, teda zrýchlenie pôvodnej veličiny. V uvedenom prípade môžeme vyjadriť zrýchlenie ako funkciu času deriváciou rýchlosti alebo druhou deriváciou dráhy.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

Posledný výraz čítame „d druhé s podľa dt na druhú". ***Fyzikálnou podstatou druhej derivácie*** je teda ***zrýchlenie*** danej veličiny v určitom čase *t*.

Ešte sa zamerajme na geometrický význam derivácie, obr. 2a) (dotyčnica v bode t_1 a t_2). Z uvedeného vzorca je zrejmé, že hodnota derivácie v ktoromkoľvek bode krivky funkcie je daná strmosťou tejto krivky. Ak krivka stúpa, je derivácia kladná. Ak sa hodnota danej veličiny v čase nemení (v našom prípade vrchol krivky) je derivácia nulová. Ak krivka klesá, je derivácia záporná.

Strmosť krivky môžeme definovať sklonom dotyčnice skonštruovanej v ktoromkoľvek bode krivky funkcie. Tangens uhla, ktorý zviera s kladnou časťou časovej osi nazývame *smernica dotyčnice*. Vypočítame ju pomocou *prírastkov na dotyčnici* obdobne ako je znázornené na obr. 2a).

$$\frac{ds(t_1)}{dt} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} \quad \text{resp.} \quad \frac{ds(t_2)}{dt} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}$$

Geometrický význam derivácie v danom bode krivky funkcie je teda *smernica dotyčnice* v tomto bode.

Integrál časovej funkcie

Integrovanie je opačnou matematickou operáciou ako derivovanie. Rovnako opačná je aj fyzikálna podstata.

Deriváciou časového priebehu ktorejkoľvek fyzikálnej veličiny sme získali časový priebeh rýchlosti zmeny danej fyzikálnej veličiny. Integráciou naopak z časového priebehu rýchlosti zmeny ktorejkoľvek fyzikálnej veličiny získame časový priebeh danej fyzikálnej veličiny.

Pre ilustráciu nám opäť môže poslúžiť vzťah medzi dráhou, okamžitou rýchlosťou a časom. Vieme, že prírastok dráhy, vykonaný okamžitou rýchlosťou za prírastok času, je daný približným vzťahom

$$\Delta s \approx v\Delta t$$

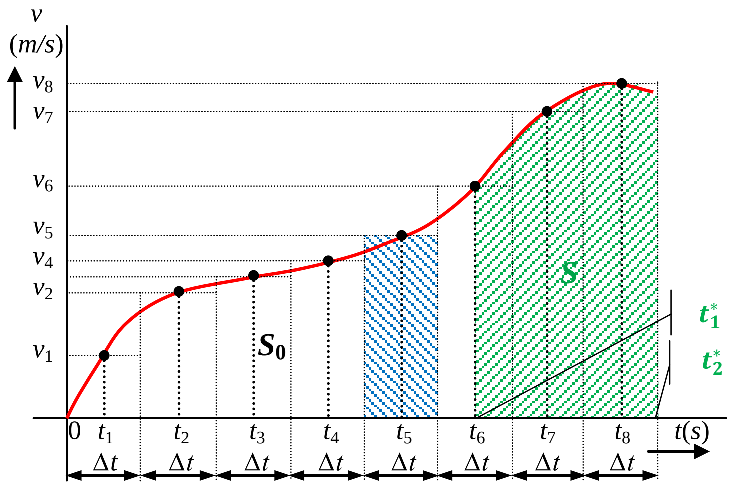
Je zrejmé, že celková dráha vykonaná za určitý čas pri nerovnomernom pohybe je daná súčtom všetkých jednotlivých prírastkov dráhy. Pre určenie jednotlivých prírastkov dráhy však potrebujeme poznať priebeh okamžitej rýchlosti v závislosti na čase.

$$v = v(t)$$

Pri zvolenom malom konštantnom prírastku času si rovnako očíslujeme okamžité rýchlosti a príslušné prírastky dráhy. Pre očíslovanie použijeme index, ktorý nadobúda hodnoty 1, 2, 3, ... *n*. Celkovú dráhu potom pomocou jednotlivých prírastkov vyjadruje nasledujúci približný vzťah

$$s \approx \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ \dots + \Delta s_n = v_1\Delta t + v_2\Delta t + \cdots + v_n\Delta t = \sum_{i=1}^{n} v_i\Delta t$$

Na konci výrazu je symbolický zápis jednotlivých súčinov. Grécke písmeno Σ (sigma) tu čítame „suma".



Obr. 3: Zistenie vykonanej dráhy prírastkovou metódou

Na obr. 3 je tento postup zistenia vykonanej dráhy v danom časovom rozmedzí znázornený graficky. Využíva sa graf časovej závislosti rýchlosti $v = v(t)$. Každý súčin $v_i \Delta t$ je tu reprezentovaný plochou obdĺžnika so základňou Δt a výškou určenou príslušnou okamžitou rýchlosťou v_i. Celková dráha je potom približne daná súčtom jednotlivých plôch (S_i) nachádzajúcich sa v časovom intervale t_1 až t_n, v ktorom vykonanú dráhu zisťujeme. Plochy, ktoré sú pod časovou osou musíme pričítať so záporným znamienkom lebo rýchlosť tu má tiež záporný zmysel.

Presnosť tejto metódy bude tým väčšia, čím menší zvolíme časový prírastok Δt. V medznom prípade sa potom prírastok času mení na diferenciál času *dt*. V tom prípade sa potom suma súčinov mení na ***integrál***. Ak vykonávame integráciu v určitom časovom intervale t_1^* až t_2^*, ide o tzv. *určitý integrál*. Čas t_1^* udáva dolnú medzu integrácie a čas t_2^* udáva hornú medzu integrácie. Na obr. 3, zelenou farbou, je znázornená plocha ***S***, ktorá predstavuje dráhu v metroch, ktorá bola vykonaná v časovom intervale t_1^* až t_2^*. *Geometrický význam integrálu* časovej funkcie je teda *súčet plôch medzi danou krivkou funkcie a osou času*, pričom plochy nad osou času sa pripočítajú a pod odčítajú. V našom prípade je $s = S$, pretože krivka nezasahuje pod os.

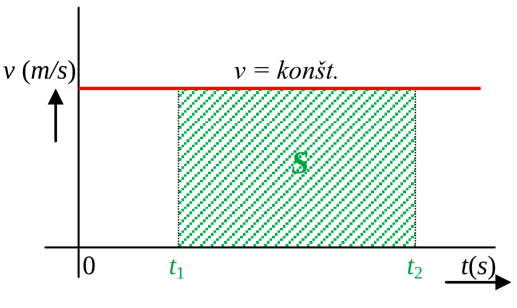
Pri integrovaní je niekedy potrebné uvažovať s hodnotou fyzikálnej veličiny už pred integráciou, tzn. už pred časom t_1^*. Túto hodnotu nazývame *začiatočné podmienky integrácie*. V našom prípade je to dráha vykonaná pred časom t_1^*, ktorú môžeme označiť s_0 (s_0=S_0).

Integrál symbolicky znázorňujeme značkou $\int$, za ktorou je uvedená integrovaná funkcia. V našom prípade ide o časovú funkciu $v(t)$. Za funkciou nasleduje diferenciál času *dt*.

Úplný zápis nášho prípadu má teda tvar

$$s(t) = s_0 + \int_{t_1^*}^{t_2^*} v(t)dt$$

Výraz čítame „s(t) sa rovná s_0 plus integrál od t_1^*do t_2^*. v(t) dt". Diferenciál *dt* tu znamená, že nezávisle premennou, v ktorej integrácia prebieha je čas. I keď najčastejšie integrujeme v čase a derivujeme podľa času, môže byť nezávisle premennou ktorákoľvek fyzikálna veličina, prípadne matematická premenná (napr. pre $y = f(x)$ pracujeme s diferenciálom *dx*).



Obr 4: Integrácia konštantnej funkcie

Na rozdiel od derivovania nie je integrál konštantnej funkcie nulový. Na obr. 4 je vidieť, že veľkosť integrálu konštantnej funkcie, t.j. plochy pod krivkou funkcie (tu priamkou), lineárne rastie s dobou integrácie teda s veľkosťou integračného intervalu t_1 až t_2.