kde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ a $\varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

Prevod goniometrického tvaru komplexného čísla na exponenciálny tvar je podľa Eulerovho vzťahu $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$. Takže frekvenčný prenos $G(j\omega)$ si upravíme na exponenciálny tvar

$$G(j\omega) = A(\omega).e^{j\varphi(\omega)} \tag{29}$$

a podľa postupu uvedeného v príklade 14 vypočítame do tabuľky hodnoty A a φ pre volené hodnoty ω a z tejto tabuľky skonštruujeme frekvenčnú charakteristiku.

Príklad 15:

Zostrojte frekvenčnú charakteristiku systému s prenosom

$$G(s) = \frac{1{,}5}{2s^2 + 3s + 1}$$

Riešenie:

Tento príklad budeme riešiť obidvomi spôsobmi konštrukcie frekvenčnej charakteristiky, tzn. ako zo zložkového tvaru prenosu tak z exponenciálneho tvaru.

Najprv vykonávame konštrukciu zo zložkového tvaru $G(j\omega)$. Zmeníme ho na tento tvar. Ak je komplexné číslo v tvare zlomku, prevádzame ho na zložkový tvar rozšírením zlomku číslom komplexne združeným k menovateľu:

$$G(j\omega) = \frac{1{,}5}{2(j\omega)^2+3j\omega+1} = \frac{1{,}5}{1-2\omega^2+3j\omega}\,\frac{1-2\omega^2-3j\omega}{1-2\omega^2-3j\omega} = \frac{1{,}5-3\omega^2}{(1-2\omega^2)^2+9\omega^2} - j\,\frac{4{,}5\omega}{(1-2\omega^2)^2+9\omega^2}$$

Hodnoty $Re(\omega)$ a $Im(\omega)$ sú v prvej časti tabuľky 3. Na základe tejto tabuľky je zostrojená frekvenčná charakteristika na obr. 16.

Ďalej zostrojíme tú istú frekvenčnú charakteristiku z exponenciálneho tvaru frekvenčného prenosu

$$G(j\omega) = \frac{1{,}5}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2+9\omega^2}}\,e^{-\tan^{-1}\frac{4{,}5\omega}{1{,}5-3\omega^2}}$$

Tu sme prvú časť výrazu dosadili ako

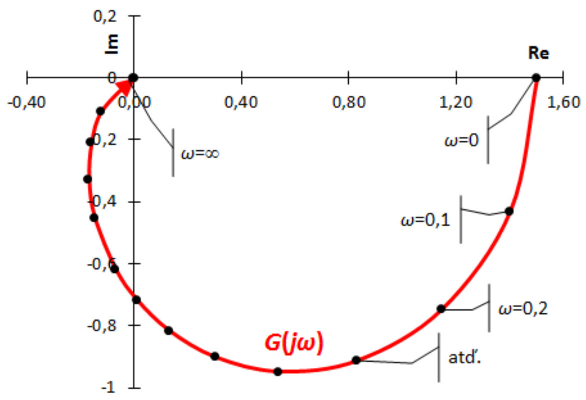
$$A = \left|\frac{1{,}5}{1-2\omega^2+3j\omega}\right| = \frac{|1{,}5|}{|1-2\omega^2+3j\omega|} = \frac{1{,}5}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2+(3\omega)^2}}$$

a druhú časť výrazu zo zložkového tvaru $G(j\omega)$ použitím vzťahu $\varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

Vypočítané hodnoty $A(\omega)$ a $\varphi(\omega)$ sú uvedené v druhej časti tabuľky 3. Z nich je konštrukcia frekvenčnej charakteristiky opäť na obr. 16, frekvenčná charakteristika sa samozrejme zhoduje s predchádzajúcou.

ω	$Re(\omega)$	$Im(\omega)$	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	1,500	0	1,500	0
0,1	1,399	-0,428	1,507	-17,021
0,2	1,144	-0,746	1,526	-33,111
0,3	0,830	-0,911	1,545	-47,663
0,4	0,536	-0,946	1,545	-60,461
0,5	0,300	-0,900	1,500	-71,565
0,6	0,127	-0,814	1,394	-81,158
0,7	0,007	-0,714	1,237	-89,454
0,8	-0,072	-0,617	1,061	-96,654
1	-0,150	-0,450	0,750	-108,435
1,2	-0,171	-0,327	0,535	-117,575
1,5	-0,162	-0,208	0,344	-127,875
2	-0,124	-0,106	0,192	-139,399
10	-0,007	-0,001	0,008	-171,427
1000000	0,000	0,000	0,000	-180,000

Tab. 3



Obr. 16

Na výpočet hodnôt a vykresľovanie obdobných grafov je samozrejmosťou používať príslušný softvér, napr. Excel.

Príklad 16:

Zostrojte frekvenčné charakteristiky pre systémy s prenosmi

a) $G(s) = \frac{k}{s}$
b) $G(s) = ks$
c) $G(s) = \frac{k}{s^2}$
d) $G(s) = ks + a$
e) $G(s) = \frac{k}{s} + a$

Riešenie:

Frekvenčné prenosy sú (prípadne po úprave)

a) $G(j\omega) = -j\frac{k}{\omega}$

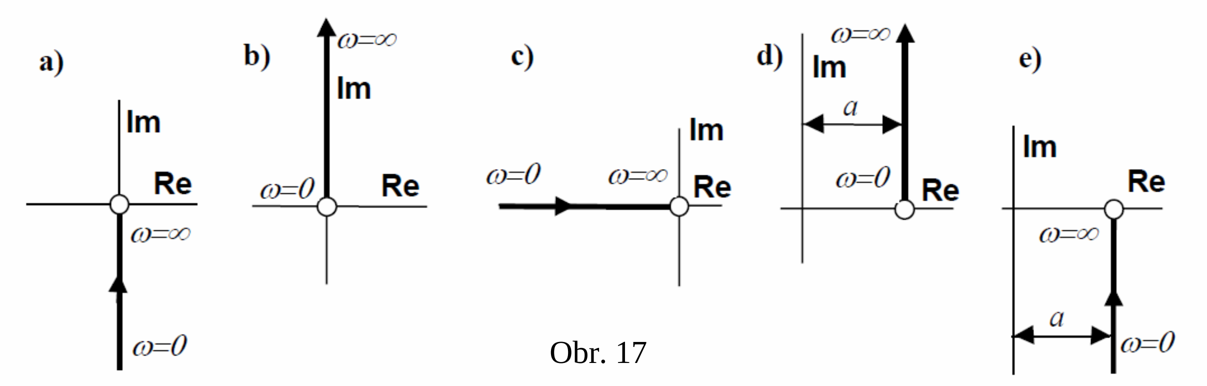
b) $G(j\omega) = kj\omega$

c) $G(j\omega) = -\frac{k}{\omega^2}$

d) $G(j\omega) = kj\omega + a$

e) $G(j\omega) = -j\frac{k}{\omega} + a$

Zodpovedajúce frekvenčné charakteristiky sú na obr.17.



Obr. 17

Teraz niečo o **tvare frekvenčných charakteristík**. Dá sa ľahko ukázať, že frekvenčná charakteristika proporcionálneho člena s oneskorením 1. rádu s prenosom

$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)\ \dots}$$

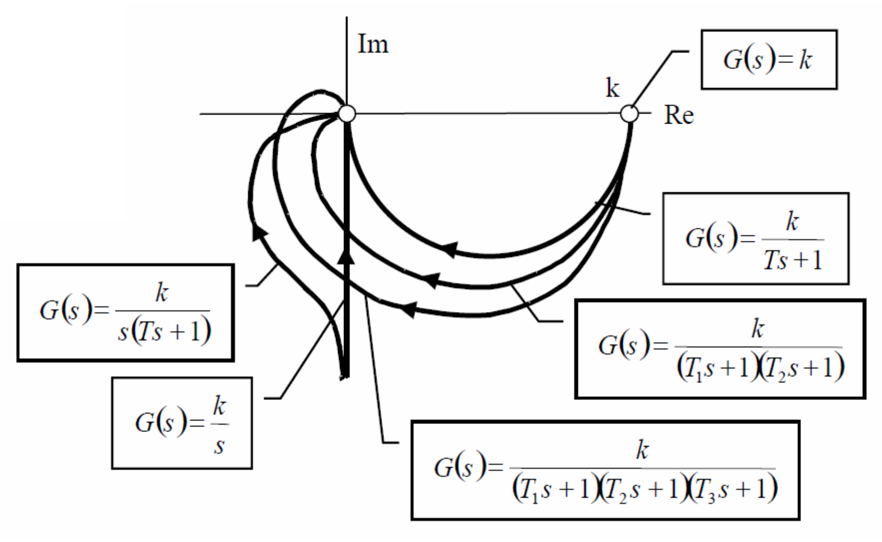
je polkružnica v kvadrante $Re = +, Im = -$. Ďalšie proporcionálne regulačné členy s prenosmi

$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\ \dots}$$

majú frekvenčné charakteristiky, začínajúce v rovnakom bode $[k, 0]$ na reálnej osi, končiace v začiatku súradnicového systému a prechádzajúce toľkými kvadrantmi, aký je rád (aké je oneskorenie) regulačného člena – znázornené na obr. 18.

Podľa príkladu 16 a) je frekvenčná charakteristika ideálneho integračného (astatického) regulačného člena záporná imaginárna polos. Ďalšie integračné členy s prenosmi

$$G(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots}$$



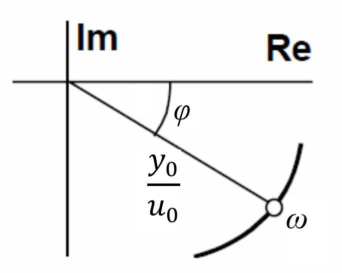
Obr. 18

majú frekvenčnú charakteristiku začínajúcu limitne na zápornej imaginárnej polosi, končiacu v začiatku súradnicového systému a prechádzajúcu podľa rádu (oneskorenia) regulačného člena vždy o jeden kvadrant viac než člen nižšieho rádu – obr. 18.

Frekvenčnú charakteristiku môžeme samozrejme skonštruovať z frekvenčného prenosu pre akýkoľvek systém. Ale v tom nie je hlavný význam frekvenčných charakteristík. Frekvenčné metódy majú predovšetkým veľký praktický význam preto, že ich môžeme získať **experimentálne** – meraním na reálnom zariadení.

Postup pri experimentálnom zisťovaní frekvenčnej charakteristiky je zhruba tento:

- na vstup systému privedieme sínusový signál (generátor sínusových kmitov) určitej frekvencie $u = u_0 \sin \omega t$,
- zapisujeme priebeh výstupného signálu (osciloskop, zapisovač), až sa na výstupe ustália sínusové kmity $y = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$,
- zo záznamu vstupného a výstupného signálu určíme pomer amplitúd y_0/u_0 a fázový posun φ,
- z definície frekvenčného prenosu (26) $G(j\omega) = \frac{y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{u_0 e^{j\omega t}} = \frac{y_0}{u_0} e^{j\varphi}$ dostaneme jeden bod frekvenčnej charakteristiky podľa obr. 19,
- zmeníme frekvenciu ω vstupného signálu a postup opakujeme pre získanie ďalšieho bodu charakteristiky. **Frekvenčná charakteristika je potom spojnica koncových bodov vektorov pre frekvencie od $\omega = 0$ po $\omega = \infty$.**



Obr. 19

Amplitúdová frekvenčná charakteristika v logaritmických súradniciach

Ide o bežne používané zobrazenie frekvenčnej charakteristiky. Na vodorovnú os vynášame uhlovú frekvenciu v logaritmickej mierke a na zvislú os v lineárnej mierke amplitúdu v decibeloch. Amplitúdu jednoducho získame z frekvenčného prenosu

$$G_{dB} = 20.\,log|G(j\omega)|$$

Absolútnu hodnotu $|G(j\omega)|$ získame pomocou Pytagorovej vety

$$G_{dB} = 20.\log\sqrt{[ReG(j\omega)]^2 + [ImG(j\omega)]^2}$$

Dosadením hodnôt za uhlovú frekvenciu ω a vyčíslením G_{dB} dostaneme body amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky v logaritmických súradniciach daného systému. Vynesením vypočítaných bodov do grafu získam priebeh amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky v logaritmických súradniciach.

Priebeh amplitúdovej frekvenčnej charakteristiky môžeme s veľkou presnosťou aproximovať lomenou priamkou. *Uhlové frekvencie lomu* priamky sú určené prevrátenou hodnotou príslušnej časovej konštanty. Pri frekvencii lomu je spravidla maximálny rozdiel (chyba) medzi aproximovanou a skutočnou charakteristikou 3 *dB*, charakteristika sa spravidla lomí o 20 *dB* na dekádu. Členy s časovou konštantou v menovateli spôsobujú lom o –20 *dB*/*dek* a členy v čitateli o +20 *dB*/*dek*. Pri výpočte týchto hodnôt vychádzame z prenosu s vyjadrenými časovými konštantami.

Napríklad, ak má prenos tvar

$$G(s) = \frac{12{,}5}{(5s+1)(0{,}25s+1)}$$

Usporiadame časové konštanty podľa veľkosti od najväčšej a vypočítame ω.

$$T_1 = 5\ [s] \ \Rightarrow\ \omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{5} = 0{,}2\ [s^{-1}]$$

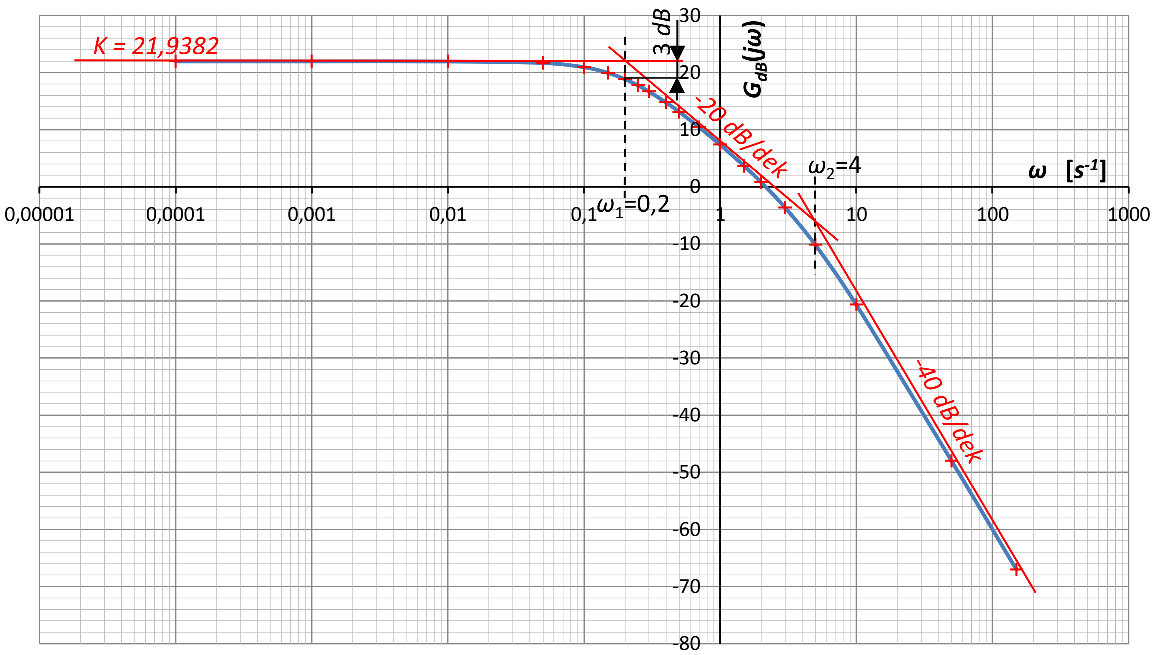
$$T_2 = 0{,}25\ [s] \ \Rightarrow\ \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0{,}25} = 4\ [s^{-1}]$$

ďalej vypočítame zosilnenie K v dB

$$K_{dB} = 20.\,log K = 20.\,log 12{,}5 = 21{,}9382\ [dB]$$

Vynesením priamok (červené) do grafu získame aproximovanú amplitúdovú frekvenčnú charakteristiky v logaritmických súradniciach zadaného systému.

Amplitúdová frekvenčná charakteristika



Fázová frekvenčná charakteristika v logaritmických súradniciach

Na vodorovnú os vynášame uhlovú frekvenciu ω v logaritmickej mierke a na zvislú os v lineárnej mierke fázu v uhlových stupňoch. Fázu jednoducho získame z frekvenčného prenosu $G(j\omega)$ použitím vzťahu pre tangens v pravouhlom trojuholníku.

$$tg(\varphi) = \frac{ImG(j\omega)}{ReG(j\omega)}$$

potom

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{ImG(j\omega)}{ReG(j\omega)}$$

Dosadením hodnôt za uhlovú frekvenciu ω a vyčíslením φ dostaneme body fázovej frekvenčnej charakteristiky v logaritmických súradniciach zadaného systému. Vynesením vypočítaných bodov do grafu získam priebeh fázovej frekvenčnej charakteristiky v logaritmických súradniciach.

Poznámka: K vypočítaným hodnotám fázy, ktorá prekročila hodnotu –90º musíme pripočítať –180º.