Veta 3.: O obraze derivácie

Nech $F(s)$ je Laplaceov obraz $f(t)$ a $f(0)$ je limita $f(t)$ keď t sa blíži k 0. Laplaceova transformácia časovej derivácie $f(t)$ je

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - lim_{t\to 0} f(t) = sF(s) - f(0)$$

n-tej derivácie $L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ (11)

Veta 4.: O obraze integrálu

Laplaceov obraz integrálu $f(t)$ v čase je Laplaceov obraz $f(t)$ podelený s,

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{12}$$

Vráťme sa však k **prenosu,** ktorý je najčastejšie používaným spôsobom popisu lineárnych regulačných systémov a hlavne regulačných členov. Je definovaný ako pomer Laplaceovho obrazu výstupnej veličiny k Laplaceovmu obrazu vstupnej veličiny pri nulových začiatočných podmienkach.

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}} \tag{13}$$

Ak máme regulačný člen daný diferenciálnou rovnicou všeobecne v tvare (1), môžeme pomerne jednoducho odvodiť dôležitý vzorec pre výpočet prenosu z diferenciálnej rovnice

$$a_n s^{(n)} Y(s) + a_{n-1} s^{(n-1)} Y(s) + \dots + a_1 s\, Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^{(m)} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$\underbrace{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)}_{A(s)} Y(s) = \underbrace{(b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0)}_{B(s)} U(s)$$

$$A(s) Y(s) = B(s) U(s)$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}} \tag{14}$$

Z podmienky fyzikálnej realizovateľnosti (2) plynie, že stupeň polynómu v čitateli musí byť menší alebo rovný stupňu polynómu v menovateli prenosu $G(s)$.

Ešte je dobré si všimnúť, že vzorec má na **rozdiel** od definície prenosu v čitateli polynóm, utvorený z koeficientov vstupnej funkcie v diferenciálnej rovnici a v menovateli polynóm utvorený z koeficientov výstupnej funkcie. Príslušná derivácia v diferenciálnej rovnici zodpovedá príslušnej mocnine komplexnej premennej s.

Príklad 4:

Utvorte prenos systému, ak je daná jeho diferenciálna rovnica

a) $y''' + 4y'' + 0{,}5y' + 2y = 6u' + 3u$

Riešenie: $G(s) = \frac{6s+3}{s^3+4s^2+0{,}5s+2}$

b) $10y'' + 5y' = u$

Riešenie: $G(s) = \frac{1}{10s^2+5s} = \frac{0{,}2}{s(2s+1)}$

c) $y = 4u$

Riešenie: $G(s) = 4$

Príklad 5:

Pre zadaný prenos napíšte diferenciálnu rovnicu systému

a) $G(s) = \frac{7s^2+6s+2}{s^3+5s^2+2s+8}$

Riešenie: $y''' + 5y'' + 2y' + 8y = 7u'' + 6u' + 2u$

b) $G(s) = \frac{3s}{s^2+s+0,5}$

Riešenie: $y'' + y' + 0,5y = 3u'$

Okrem základného tvaru (14) môžeme prenos upraviť ešte do dvoch bežne používaných tvarov s vyjadrením tzv. **pólov** a **núl** prenosu resp. prenos s **časovými konštantami**.

Póly a nuly systému, časové konštanty

Prenos s vyjadrenými nulami a pólami

$$\boldsymbol{G(s) = k\frac{(s-n_1)(s-n_2)\dots(s-n_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}} \qquad (14\text{ a})$$

Prenos s časovými konštantami

$$\boldsymbol{G(s) = K\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)\dots(\tau_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\dots(T_n s+1)}} \qquad (14\text{ b})$$

V prvom prípade (14 a) rozložíme polynóm v čitateli aj v menovateli na súčin koreňových činiteľov. Korene čitateľa sa nazývajú **nuly prenosu (n_i)** a korene menovateľa **póly prenosu (p_i)** (póly prenosu sú korene rovnice $\boldsymbol{A(s) = 0}$, ktorú nazývame **charakteristická rovnica**, je dôležitým pojmom v teórii riadenia). Podľa rozloženia pólov a núl v komplexnej rovine vieme posúdiť dynamiku systému a či je systém stabilný. *Všeobecne platí, že ak sú póly umiestnené viac vľavo od imaginárnej osi bude prechodový dej viac tlmený a kratší. Póly v pravej polovici znamenajú nestabilný stav. Ak sú póly komplexné čísla, znamená to vždy, že prechodový dej bude mať kmitavú zložku, bude periodický. Ak sú nuly bližšie k imaginárnej osi ako póly bude prevládať vplyv čitateľa prenosu v opačnom prípade bude prevládať vplyv menovateľa prenosu.* Na zobrazenie pólov a núl v komplexnej rovine sa obvykle používajú symboly: póly ×, nuly ○.

V druhom prípade (14 b) je čitateľ aj menovateľ prenosu upravený na zvláštny tvar, kde koeficienty pri s (**τ_i, T_i**) sú **časové konštanty prenosu** a majú rozmer času. Platí pre ne

$$\tau_i = -\frac{1}{n_i} \qquad\qquad T_i = -\frac{1}{p_i}$$

Príklad 6:

Vypočítajte prenos a vyjadrite ho vo všetkých troch tvaroch (základný tvar, s vyjadrenými nulami a pólami a s časovými konštantami) ak je systém popísaný diferenciálnou rovnicou

a) $4y'' + 20y' + 16y = 3u'' + 15u' + 18u$
b) $y''' + 3y'' + 2y' = 2u' + 6u$

Riešenie:

Základný tvar a) $G(s) = \frac{3s^2+15s+18}{4s^2+20s+16}$ b) $G(s) = \frac{2s+6}{s^3+3s^2+2s}$

Tvar s vyjadrenými nulami a pólami a) $G(s) = \frac{3(s+2)(s+3)}{4(s+1)(s+4)}$ b) $G(s) = 2\frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)}$

Tvar s časovými konštantami a) $G(s) = \frac{3}{4}\frac{2(0,5s+1)3(0,33s+1)}{(s+1)4(0,25s+1)} = \frac{9}{8}\frac{(0,5s+1)(0,33s+1)}{(s+1)(0,25s+1)}$

b) $G(s) = \frac{2*3(0,33s+1)}{s(s+1)2(0,5s+1)} = 3\frac{0,33s+1}{s(s+1)(0,5s+1)}$

Z definície prenosu (13) je zrejmé, že ak poznáme vstupný signál systému $u(t)$, resp. jeho obraz $U(s)$ môžeme z prenosu $G(s)$ určiť odozvu $y(t)$ systému na ľubovoľnú zmenu vstupnej veličiny $u(t)$. A to je jedna zo základných úloh regulácie. Pretože prenos $G(s)$ je definovaný za predpokladu nulových začiatočných podmienok, je aj obraz odozvy možné spočítať iba za predpokladu nulových začiatočných podmienok. (Samozrejme, že je možné odvodiť obdobný, zložitejší vzorec za predpokladu nenulových začiatočných podmienok).

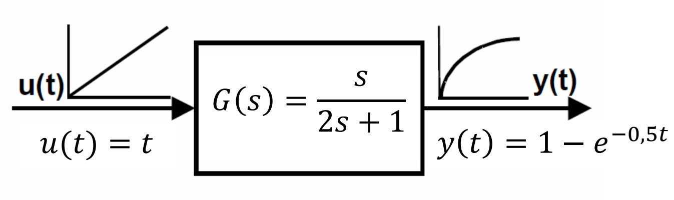
$$\boldsymbol{Y(s) = G(s).U(s)} \tag{15}$$

Zo vzťahu (15) potom vyplýva, že originál odozvy dostaneme spätnou Laplaceovou transformáciou.

$$\boldsymbol{y(t) = L^{-1}\{G(s).U(s)\}} \tag{16}$$

Príklad 7:

Určte odozvu regulačného člena s prenosom $G(s) = \frac{s}{2s+1}$ na vstupnú veličinu $u(t)$, ktorou je lineárne rastúca funkcia $u(t) = t$ pre $t \geq 0$.



Obr. 7

Riešenie:
Existuje jedna začiatočná podmienka $u(0) = 0$ a tá je nulová. Obraz vstupnej veličiny podľa slovníka Laplaceovej transformácie je

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

a obraz odozvy potom $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s}{2s+1}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s(2s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0,5}$

a odozva $y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0,5}\right\} = 1 - e^{-0,5t}$ ako je ukázané na obr. 7.

1.3.Impulzná funkcia a charakteristika

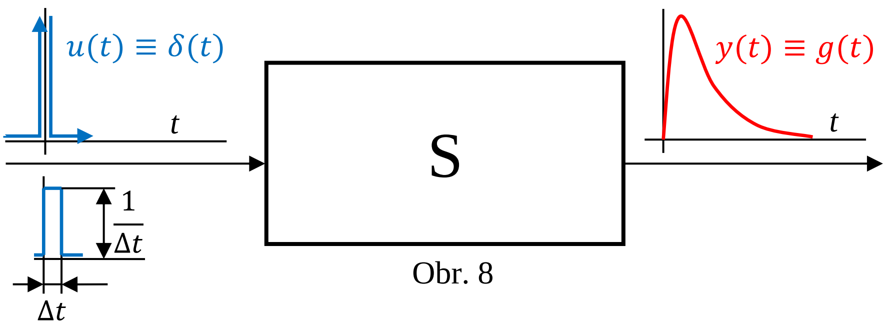
Impulzná funkcia je odozva systému na jednotkový (Diracov) impulz $\delta(t)$ na vstupe systému a označujeme ju $g(t)$ – obr.8**. Jej graf je impulzná charakteristika.**

Jednotkový (Diracov) impulz $\delta(t)$ je „funkcia“, ktorá sa javí ako nekonečne krátky impulz o nekonečne veľkej amplitúde, ktorého plocha sa rovná jednej a Laplaceov obraz sa taktiež rovná jednej.

$$\delta(t) = 0 \;\; pre \;\; t \neq 0; \qquad \delta(t) = \infty \;\; pre \;\; t = 0 \tag{15}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1 \tag{16}$$

$$L\{\delta(t)\} = 1 \tag{17}$$



Obr. 8