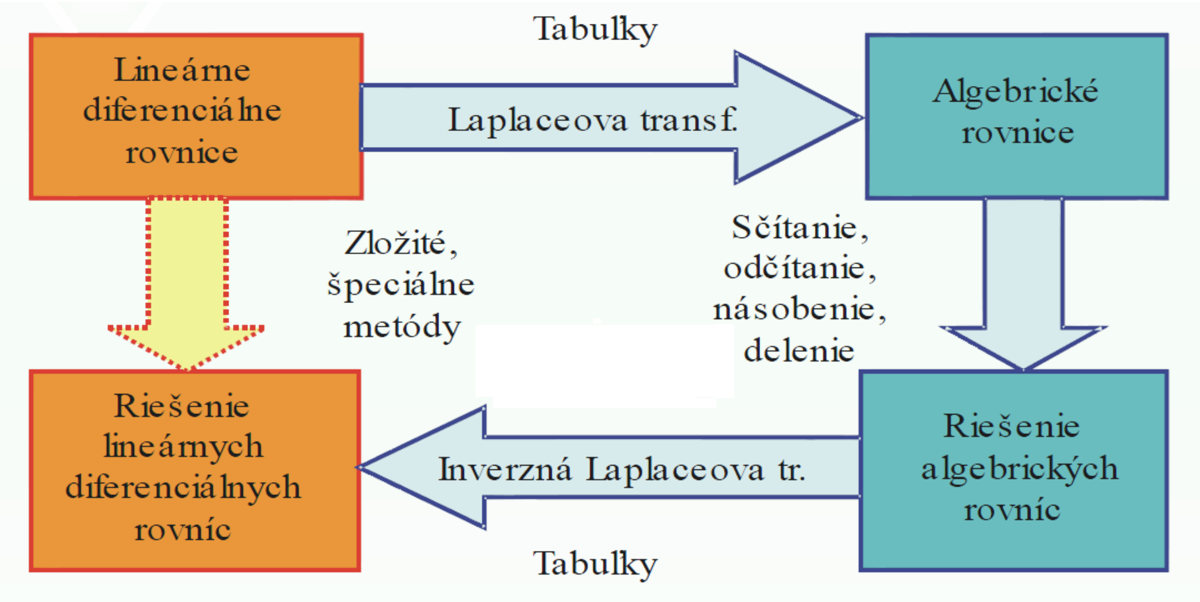
1.2.Prenos v Laplaceovej transformácii

Laplaceova transformácia je matematický aparát, ktorý umožňuje pomerne ľahko riešiť úlohy spojitej lineárnej regulácie. Zaviedol ju v roku 1820 francúzsky matematik Laplace a umožnila mu výhodne riešiť diferenciálne rovnice. Ako sa čoskoro dozvieme, transformáciou diferenciálnej rovnice dostaneme algebrickú rovnicu. Ak túto vyriešime a vykonáme spätnú transformáciu riešenia, získame hľadané riešenie pôvodnej rovnice.

Význam použitia Laplaceovej transformácie v teórii regulácie je však hlbší. S jej pomocou môžeme totiž veľmi jednoducho popísať lineárne spojité regulačné systémy namiesto diferenciálnymi rovnicami tzv. **prenosmi**. U nich je zvlášť výhodné, že z prenosov jednotlivých častí môžeme veľmi jednoducho vypočítať prenos celého systému alebo obvodu.

Pojem **transformácia funkcie** znamená, že každej funkcii $\boldsymbol{f(t)}$ z jednej množiny premennej t priradíme funkciu $\boldsymbol{F(s)}$ z množiny funkcií komplexnej premennej s – obr. 6.



Obr. 6

(Všimnime si podobnosti tejto definície s definíciou funkcie $y = f(x)$, ktorá hovorí, že funkcia je priradenie, ktoré k nezávisle premennej x z jednej množiny, priraďuje závisle premennú y z inej množiny). Význam pojmu transformácia je, že priradíme tzv. **originálu** (tu funkciou času t) určitým predpisom tzv. **obraz** (je funkciou komplexnej premennej s[1]).

Transformácia **originál→obraz** je priama transformácia. Existuje samozrejme k nej **spätná (inverzná) transformácia,** teda transformácia **obraz→originál,** ktorá k obrazu $F(s)$ priraďuje opäť originál $f(t)$.

Z možných transformácií je v regulačnej technike pre spojitú reguláciu používaná práve **transformácia Laplaceova,** ktorá je definovaná vzťahom

$$\boldsymbol{F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt} \tag{5}$$

Laplaceova transformácia L priraďuje funkcii $f(t)$ pre čas $t \geq 0$ funkciu $F(s)$, čo symbolicky zapisujeme vzťahom

$$\boldsymbol{L\{f(t)\} = F(s)} \tag{6}$$

Naopak, **spätná transformácia** sa dá symbolicky zapísať vzťahom

[1] používa sa aj symbol p

$$\boldsymbol{f(t) = L^{-1}\{F(s)\}} \tag{7}$$

Táto spätná transformácia sa môže vykonať vzťahom pre výpočet originálu k danému obrazu

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c F(s)\, e^{st}\, ds} \tag{8}$$

čo znamená vyčísľovanie krivkového integrálu po uzavretej krivke c, ktorá v sebe uzaviera všetky singulárne body funkcie $F(s)$.Toto vyčísľovanie je možné reziduálnou vetou, ale väčšinou sa nepoužíva a v praxi sa spätná transformácia vykonáva použitím slovníka Laplaceovej transformácie, o ktorom bude hovorené ďalej.

Príklad 2:

Určte Laplaceove obrazy nasledujúcich funkcií

a) $f(t) = e^{-at}$
b) $f(t) = at$

kde v obidvoch prípadoch je a daná konštanta

Riešenie:

a) $F(s) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t} dt = -\frac{1}{a+s}\left[e^{-(a+s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+a}$

b) $F(s) = \int_0^\infty at.e^{-st} dt = \cdots = a\left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + a\int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st} dt = -\frac{a}{s}\left[te^{-st}\right]_0^\infty -$
$-\frac{a}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = 0 + \frac{a}{s^2} = \frac{a}{s^2}$

Pri hľadaní obrazu danej funkcie nevykonávame integráciu podľa definície (5), a tým menej pri spätnom hľadaní originálu k danému obrazu podľa vzťahu (8). To by bolo príliš prácne a niekedy aj veľmi ťažké. Bežne používame tzv. **slovník Laplaceovej transformácie**, kde máme zoradené funkcie $f(t)$ na ľavej strane a obrazy týchto funkcií $F(s)$ na pravej strane. Taký slovník iba tých najdôležitejších a najpoužívanejších funkcií je v tab. 1. V ňom vidíme napr. nami v príklade 2 vypočítané obrazy funkcií $f(t)=e^{-at}$ a $f(t)=at$.

Slovník LT tých najdôležitejších a najpoužívanejších funkcií **tab.1**

	$f(t)$	**$F(s)$**		**$f(t)$**	**$F(s)$**
1	$\delta(t)$; (diaracov impulz)	1	9	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$
2	$f(t) = 1$; (jednotkový skok)	$\frac{1}{s}$	10	$\cos \omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)}$
3	a	$\frac{a}{s}$	11	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s^2-\omega^2)}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	12	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{(s^2-\omega^2)}$
5	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	13	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	14	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
7	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	15	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
8	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	16	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$

Pri vykonávaní spätnej transformácie (hľadaní $f(t)$ k danému $F(s)$) sa bežne vyskytuje funkcia $F(s)$ ako zlomok – racionálna lomená funkcia. Takú funkciu samozrejme v slovníku nenájdeme a preto ju musíme rozložiť najprv na **parciálne zlomky** a až potom k ním nájsť v slovníku originál.

Rozklad na parciálne zlomky môžeme vykonávať obvyklou, z matematiky známou, metódou neurčitých súčiniteľov, ktorá je dosť prácna. Alebo môžeme použiť metódu Heavisidovho rozvoja, ktorá sa často uvádza v publikáciách o regulačnej technike.

Príklad 3:

Rozložte na parciálne zlomky a vykonajte spätnú transformáciu podľa slovníka nasledujúce zlomky:

a) $F(s) = \frac{2}{s(s+1)}$

b) $F(s) = \frac{5}{(s+3)(s+8)}$

c) $F(s) = \frac{3s+1}{(s+2)(s+3)(s+7)}$

d) $F(s) = \frac{10s}{s^2+25}$

Riešenie:

a) $\frac{2}{s(s+1)} = 2\frac{1}{s(s+1)}$ podľa riadku 7, tab.1 $\underline{f(t) = 2(1-e^{-t})}$

b) $\frac{5}{(s+3)(s+8)} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+8)}$ rovnicu vynásobíme $(s+3)(s+8)$

$5 = A(s+8) + B(s+3)$ na výpočet konštánt A a B používame rôzne postupy, napr.: Postupne volíme hodnotu s tak, aby sme eliminovali A, resp. B v rovnici.

1.) $\boldsymbol{s = -3}$ potom $5 = A(-3+8) \rightarrow 5 = 5A \rightarrow \boldsymbol{A = 1}$

2.) $\boldsymbol{s = -8}$ potom $5 = B(-8+3) \rightarrow 5 = -5B \rightarrow \boldsymbol{B = -1}$

$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+8}\right\} = \underline{e^{-3t} - e^{-8t}}$ podľa riadku 6, tab.1

c) $\frac{3s+1}{(s+2)(s+3)(s+7)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+7)}$ rovnicu riešime vynásobením menovateľom pravej strany, výpočet A, B, C získame napr. porovnaním ľavej a pravej strany rovnice, platí že dva mnohočleny rovnakého stupňa sú identické ak sú zhodné koeficienty u zhodných mocnín.

$3s + 1 = s^2(A+B+C) + s(10A+9B+5C) + (21A+14B+6C)$ potom

$A + B + C = 0$

$10A + 9B + 5C = 3$

$21A + 14B + 6C = 1$

Riešením troch rovníc o troch neznámych dostávame

$A = -1;\ B = 2;\ C = -1$

$f(t) = L^{-1}\left\{-\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+7}\right\} = \underline{-e^{-2t} + 2e^{-3t} - e^{-7t}}$ podľa riadku 6, tab.1

d) $\underline{f(t) = 10\cos 5t}$ podľa riadku 10, tab.1

1.2.1. Hlavné vety transformácie

Veta 1.: Násobenie konštantou

Nech k je konštanta, a $F(s)$ je Laplaceov obraz $f(t)$. Potom

$$L\{kf(t)\} = kF(s) \tag{9}$$

Veta 2.: Súčet a rozdiel

Nech $F_1(s)$ a $F_2(s)$ sú Laplaceove obrazy funkcií $f_1(t)$ a $f_2(t)$. Potom

$$L\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = F_1(s) \pm F_2(s) \tag{10}$$