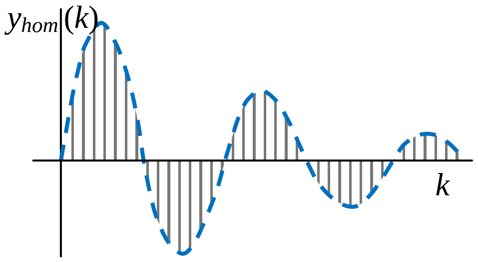
5.6. Stabilita diskrétnych obvodov

5.6.1. Všeobecná podmienka stability

Pre diskrétne systémy platí rovnaká definícia stability ako pre každý lineárny systém:

Systém je stabilný, ak sa po odznení budiaceho signálu vráti do rovnovážneho stavu.



Obr. 24

Názorne je to zobrazené na Obr. 24 a matematicky zapísané (už pre diskrétne systémy)

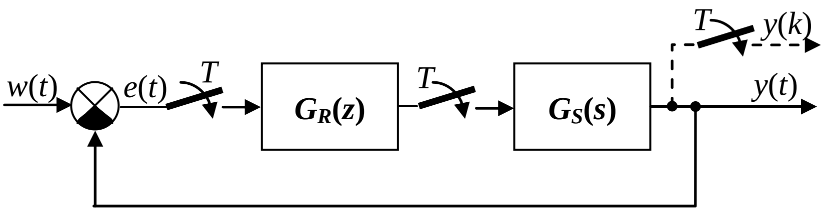
$$\lim_{k\to\infty} y_{hom}(k) = 0 \qquad (5.40)$$

Predpokladajme diskrétny regulačný obvod podľa Obr. 25. Charakteristická rovnica je obdobne ako pri spojitých systémoch daná vzťahom

$$\boxed{1 + G_R(z)G_S(z) = 0} \qquad (5.41)$$

kde prenosy regulovanej sústavy a regulátora sú ako Z–prenosy pochopiteľne v Z–transformácii. Táto rovnica má všeobecne tvar

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (5.42)$$



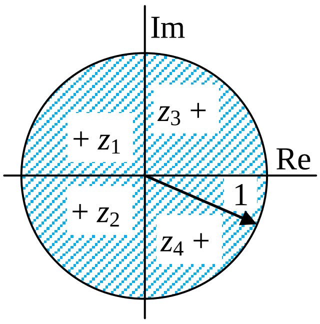
Obr. 25

Ak určíme jej korene z_1, z_2, … z_n, môžeme vysloviť všeobecnú podmienku stability diskrétnych regulačných obvodov, ktorá sa trochu líši od všeobecnej podmienky stability spojitých obvodov:

Diskrétny obvod je stabilný, ak ležia korene charakteristickej rovnice (5.41) vo vnútri jednotkovej kružnice – Obr. 26.

$$\boxed{|z_i| < 1} \quad \text{pre} \quad i = 1, 2, \dots n \qquad (5.43)$$

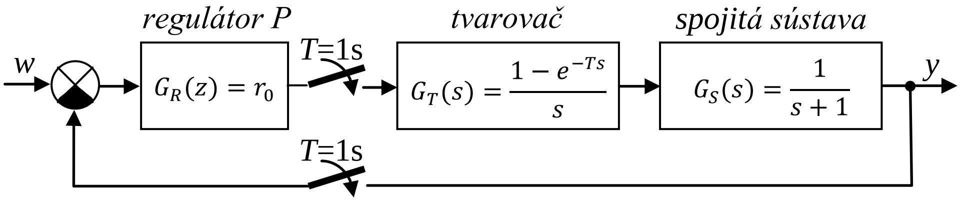
Poznámka: pri diskrétnych obvodoch neplatí žiadna podmienka kladnosti koeficientov charakteristickej rovnice – nie je dôvod, prečo by mala platiť.



Obr. 26

Príklad 5.12:

Určte pre aké hodnoty r_0 číslicového P regulátora bude obvod na Obr. 27 stabilný.



Obr. 27

Riešenie: Prenos zapojenia vzorkovač – tvarovač – sústava je

$$G_C(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{1}{(s+1)}\right\} = Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} - Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}e^{-Ts}\right\} = Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} - z^{-1}Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} =$$

$$= (1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-1}}\right) = \frac{0{,}632}{z-0{,}368}$$

Pri výpočte sme použili pravidlo, že posunutie originálnej funkcie o jednu vzorkovaciu periódu sa prejavilo v Laplaceovom obraze násobením výrazom e^{-Ts} a to v Z–obraze násobením z^{-1}.

Do charakteristickej rovnice (5.41) dosadíme $G_R(z) = r_0$, ale za $G_S(z)$ musíme dosadiť $G_C(z)$, takže

$$1 + G_R(z)G_C(z) = 1 + r_0\frac{0{,}632}{z-0{,}368} = 0$$

Charakteristická rovnica $z - 0{,}368 + 0{,}632r_0 = 0$ má jeden koreň $z_1 = 0{,}368 - 0{,}632r_0$ a tento koreň musí spĺňať podmienku (je reálny) $-1 < z_1 < 1$. Nerovnosť $-1 < 0{,}368 - 0{,}632r_0 < 1$ má riešenie $-1 < r_0 < 2{,}16$. Riešením problému je teda kladná hodnota konštanty P regulátora

$$r_0 < 2{,}16.$$

5.6.2. Kritériá stability

Aby sme nemuseli riešiť charakteristickú rovnicu, ktorá býva väčšinou vyššieho stupňa než druhého, používame rovnako ako pri spojitých systémoch kritériá stability. Niektoré sú diskrétne verzie kritérií, známych zo spojitých obvodov. Zoznámime sa s jedným algebrickým kritériom (a jedným frekvenčným - fakultatívne), ktoré sa používajú najčastejšie.

Najprv si opäť uvedomme, čo musí platiť o koeficientoch charakteristickej rovnice (5.42)

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

keď jej korene sú z_1, z_2, … z_n. Rovnicu podelíme koeficientom a_n, čím dostaneme tvar

$$z^n + \cdots + \frac{a_1}{a_n}z + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

a môžeme urobiť rozklad na súčin koreňových činiteľov

$$(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n) = 0$$

Podmienka stability diskrétnych systémov je, že korene tejto rovnice musia ležať vo vnútri jednotkovej kružnice, teda $|z_i| < 1$. Pochopiteľne môžu byť koeficienty charakteristickej rovnice kladné alebo záporné, tu nie je žiadne obmedzenie ako pri spojitých systémoch. Jediné čo musí byť splnené je, že absolútny člen uvedenej rovnice

$$\left|\frac{a_0}{a_n}\right| = |z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| < 1$$

musí byť v absolútnej hodnote menší ako jedna, pretože súčin čísel menších v absolútnej hodnote ako jedna musí byť tiež menší ako jedna. Z tohto poznatku vychádza nasledujúce kritérium.

Diskrétna verzia Routh-Schurovho kritéria

Uvedieme si algoritmus, ktorým znižujeme postupne stupeň charakteristickej rovnice až zostane jediný koeficient.

Majme charakteristickú rovnicu (5.42)

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Z koeficientov rovnice vytvoríme nasledujúcu schému

$$\begin{array}{c|cccccc|l}
 & a_n & a_{n\text{-}1} & \cdots\cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \\
\sum & a_0 & a_1 & \cdots\cdots & a_{n\text{-}2} & a_{n\text{-}1} & a_n & \xleftarrow{\prod} k = -\frac{a_0}{a_n} \\
 & ka_0 & ka_1 & \cdots\cdots & ka_{n\text{-}2} & ka_{n\text{-}1} & ka_n & \to = -a_0 \\
\hline
 & a_n+ka_0 & a_{n\text{-}1}+ka_1 & \cdots\cdots & a_2+ka_{n\text{-}2} & a_1+ka_{n\text{-}1} & 0 &
\end{array}$$

V tejto schéme je štvrtý riadok výsledkom súčtu prvého a tretieho riadku. Tretí riadok dostaneme z druhého vynásobením koeficientom

$$k = -\frac{a_0}{a_n}$$

Ak je tento koeficient

$$\boxed{|k| < 1}$$

pri všetkých ďalších znižovaniach stupňa charakteristickej rovnice (až zostane jeden koeficient), je daný systém **stabilný**. Ak počas redukcie stupňa bude *k* väčšie ako jedna, je systém nestabilný a výpočet môžeme ukončiť.

Príklad 5.13:

Určte stabilitu diskrétneho obvodu, ktorého charakteristická rovnica je

$$z^4 - 1{,}655z^3 + 1{,}012z^2 - 0{,}323z + 0{,}047 = 0$$

Riešenie: Routh-Schurov algoritmus pre znižovanie stupňa charakteristickej rovnice je nasledujúci:

1	−1,655	1,012	−0,323	0,047	
0,047	−0,323	1,012	−1,655	1	$k = -0{,}047$
−0,002	0,015	−0,048	0,078	−0,047	
0,998	−1,64	0,964	−0,245	0	
−0,245	0,964	−1,639	0,998		$k = 0{,}245$
−0,06	0,236	−0,402	0,245		
0,938	−1,404	0,562	0		
0,561	−1,402	0,938			$k = -0{,}599$
−0,336	0,840	−0,562			
0,602	−0,564	0			
−0,564	0,603				$k = 0{,}937$
−0,528	0,564				
0,074	0				

Pretože pre všetky *k* platí $|k| < 1$ je obvod stabilný.