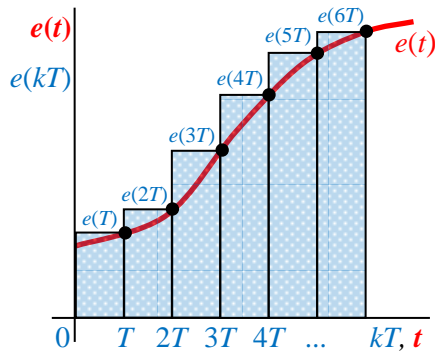


### 5.5. Číslicové regulátory

Od číslicového regulátora budeme očakávať rovnakú funkciu ako od spojitého regulátora a tou je vstupujúcu regulačnú odchýlku zosilňovať, integrovať a derivovať. Preto pri zostavovaní algoritmu pre číslicový regulátor vyjdeme z funkcie a tým aj rovnice spojitého PID regulátora. PID regulátor je popísaný rovnicou (44), ktorú upravíme vyňatím  $r_0$  rovnako, ako tomu bolo pri prenose PID regulátora, aby sme získali tvar s časovými konštantami. Takže východisková rovnica PID regulátora je



Obr. 17

$$u(t) = r_0 \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (5.30)$$

Číslicovú verziu regulátora získame z tejto rovnice diskretizáciou integrácie a derivácie. Integráciu vykonáme náhradou spojitého signálu tzv. stupňovitou náhradou **zľava** (obdĺžniky zľava – mohli sme tiež použiť obdĺžniky **sprava** či **sečnicovou** náhradou lichobežníkmi – pozri v prílohe na str. 18). Určenie hodnoty integrálu sa robí ako súčet plôch pod náhradným priebehom ako je to uvedené na Obr. 17

$$I(kT) = \int_0^{kT} e(t) dt \cong T \sum_{i=1}^k e(iT) \quad (5.31)$$

Deriváciu získame nahradením **diferenciami** podľa Obr. 18 (pozri aj v prílohe na str. 18)

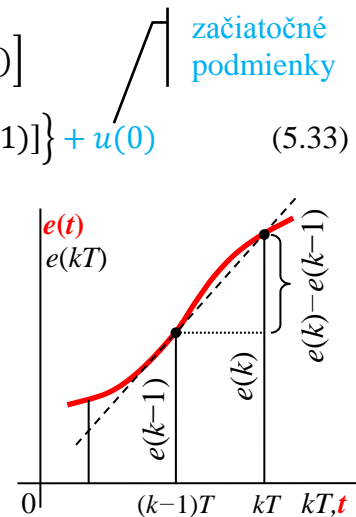
$$D(kT) = \frac{de}{dt} \cong \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad (5.32)$$

Po dosadení týchto vzťahov do rovnice spojitého PID regulátora (5.30), kde súčasne dosadíme diskretný čas  $kT$  respektíve  $k$ , dostaneme

$$u(kT) = r_0 \left[ e(kT) + \frac{1}{T_i} I(kT) + T_d D(kT) \right]$$

$$\text{respektíve } u(k) = r_0 \left\{ e(k) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^k e(i) + \frac{T_d}{T} [e(k) - e(k-1)] \right\} + u(0) \quad (5.33)$$

Tomuto algoritmu číslicového regulátora sa hovorí **polohový algoritmus** a veľmi sa nepoužíva. Hodnota integrálu sa tu získava **sumáciou** a hodnota derivácie sa získava pomocou **diferencie**. Preto sa tieto regulátory nazývajú **proporcionálno-sumačno-diferenčné**, a označujú skratkou **PSD**. Ale tiež sa nazývajú **číslkové PID regulátory**. Polohový algoritmus sa nepoužíva hlavne pre sumáciu, ktorá znamená komplikáciu pri výpočte akčného zásahu  $u(k)$ , nemá rekurentný charakter, tzn., že pre výpočet aktuálnej hodnoty akčnej veličiny  $u(kT)$  je nutné uchovávať v pamäti všetky hodnoty regulačnej odchýlky  $e(iT)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, k$ .



Obr. 18

Preto sa prechádza k tzv. **prírastkovému algoritmu** PSD regulátora, ktorý ako už názov napovedá má rekurentný charakter. Podľa tohto algoritmu sa neurčuje hodnota  $u(k)$  akčnej veličiny v danom okamžiku, ale iba jej zmena, čiže prírastok

$$\nabla u(k) = u(k) - u(k-1) \quad (5.34)$$

oproti hodnote  $u(k-1)$  akčnej veličiny v predošlom kroku.

Ak využijeme platnosť rovnice polohového algoritmu (5.33) tak, že podľa nej vyjadříme tiež hodnotu  $u(k-1)$  v predošlom kroku

$$u(k-1) = r_0 \left\{ e(k-1) + \frac{T}{T_i} \sum_{i=1}^{k-1} e(i) + \frac{T_d}{T} [e(k-1) - e(k-2)] \right\} \quad (5.35)$$

môžeme vypočítať prírastok  $\nabla u(k)$ , a tým aj definovať rovnicu prírastkového algoritmu odčítaním rovnice (5.35) od rovnice (5.33). Po malej úprave dostaneme prírastkový tvar algoritmu PSD regulátora

$$\nabla u(k) = u(k) - u(k-1) = r_0 \left( 1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i} \right) e(k) - r_0 \left( 1 + 2 \frac{T_d}{T} \right) e(k-1) + r_0 \frac{T_d}{T} e(k-2) \quad (5.36)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{q_0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{q_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{q_2}$

$$\nabla u(k) = u(k) - u(k-1) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (5.37)$$

To je prírastkový tvar algoritmu PSD regulátora. Koefficienty rovnice sú dané vzťahmi

$$q_0 = r_0 \left( 1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i} \right) \quad q_1 = -r_0 \left( 1 + 2 \frac{T_d}{T} \right) \quad q_2 = r_0 \frac{T_d}{T} \quad (5.38)$$

Akčný zásah  $u(k)$  je funkciou súčasnej regulačnej odchýlky, predchádzajúcej regulačnej odchýlky, pred-predchádzajúcej regulačnej odchýlky a predchádzajúceho akčného zásahu

$$u(k) = f[e(k), e(k-1), e(k-2), u(k-1)]$$

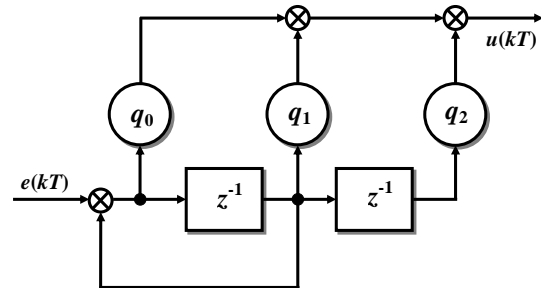
Algoritmus je jednoduchý a nekladie väčšie požiadavky na pamäť počítača.

Z rovnice (5.37) určíme podľa rovnice (5.19) Z-prenos PSD regulátora

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (5.39)$$

Bloková schéma PSD regulátora s prírastkovým algoritmom (5.39) je znázornená na Obr. 19.

Zo vzťahov (5.38) je zrejmé, že parametre  $q_0, q_1, q_2$  prírastkového algoritmu diskrétného PSD regulátora sú určené nielen parametrami  $r_0, T_i, T_d$  ekvivalentného spojitého PID regulátora, ale tiež periódou vzorkovania  $T$ . Perióda vzorkovania je teda štvrtým nastaviteľným parametrom v diskretných algoritmoch regulátorov. Otázkou zostáva určenie vhodnej veľkosti vzorkovacej periódy.



Obr. 19

Najčastejšie sa vychádza z niektorého z nasledujúcich vzťahov pre približný odhad vzorkovacej periódy:

- a)  $T \approx \frac{T_1}{10}$ , kde  $T_1$  je najväčšia časová konštanta regulovanej sústavy,
- b)  $T \approx \left( \frac{1}{6} \div \frac{1}{15} \right) T_{95}$ , kde  $T_{95}$  je čas potrebný na dosiahnutie 95% ustálenej hodnoty, prechodovej charakteristiky regulovanej sústavy,
- c)  $T \approx \left( \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} \right) \sum_i T_i$ , kde  $\sum_i T_i$  je súčet časových konštánt regulovanej sústavy

Za vhodne zvolenú hodnotu periódy vzorkovania sa v praktických realizáciách považuje taká hodnota, pri ktorej nedôjde ku zhoršeniu kvality regulácie o viac ako 15% v porovnaní s reguláciou ekvivalentným spojitém regulátorom.

Zväčšovanie periódy vzorkovania obvykle vedie ku destabilizácii regulačného pochodu v dôsledku straty informácie o regulovanej veličine medzi okamžikmi vzorkovania.

Navyše spôsobuje neprímerané prevládanie sumačnej zložky PSD regulátora na úkor vplyvu diferenčnej zložky.

Pre úplnosť sú v [tabuľke 5.2](#) v prílohe uvedené prechodové charakteristiky P, S, PS, PD a PSD regulátorov.

**Príklad 5.11:**

Zmeňte spojitý regulátor PID, ktorého parametre boli pre danú sústavu navrhnuté niektorou z optimalizačných metód na číslicový PSD regulátor pre vzorkovaciu periódu  $T = 0,1$  s. Určte jeho diferenčnú rovnicu a Z-prenos. Regulátor je daný prenosom

$$G_R(s) = 0,4 \left( 1 + \frac{1}{0,5s} + 0,1s \right)$$

**Riešenie:** Parametre  $q_0$ ,  $q_1$  a  $q_2$  určíme zo vzťahov (5.38). Z daného prenosu regulátora je zrejmé že  $r_0 = 0,4$ ,  $T_i = 0,5$  s a  $T_d = 0,1$  s.

$$q_0 = r_0 \left( 1 + \frac{T_d}{T} + \frac{T}{T_i} \right) = 0,4 \left( 1 + \frac{0,1}{0,1} + \frac{0,1}{0,5} \right) = 0,88$$

$$q_1 = -r_0 \left( 1 + 2 \frac{T_d}{T} \right) = -0,4 \left( 1 + 2 \frac{0,1}{0,1} \right) = -1,2$$

$$q_2 = r_0 \frac{T_d}{T} = 0,4 \frac{0,1}{0,1} = 0,4$$

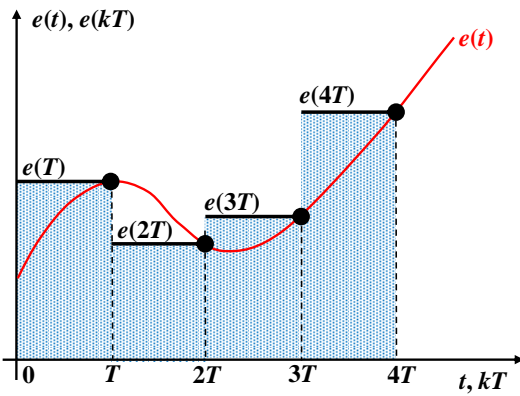
Diferenčná rovnica je  $u(k) - u(k-1) = 0,88e(k) - 1,2e(k-1) + 0,4e(k-2)$

Z-prenos je

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{0,88 - 1,2z^{-1} + 0,4z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

Rovnica spojitého PID regulátora je idealizáciou chovania skutočného PID regulátora. Na rozdiel od toho prebieha výpočet akčného zásahu v číslicovom PSD regulátore presne podľa príslušnej diferenčnej rovnice. To spôsobuje praktické problémy v praktickom nasadení číslicových regulátorov, lebo nedochádza k prirodzenému útlmu veľkých a prudkých zmien hodnôt regulačnej odchýlky a tým aj akčnej veličiny ako je to pri spojitých regulátoroch.

A ešte ďalšie technické problémy spôsobuje nasadenie číslicových regulátorov, avšak dnes prevažujú predovšetkým ich výhody. A tými sú ľahká spolupráca s vyššími riadiacimi počítačmi, cenová dostupnosť a ďalšie. A preto sa používajú stále viac a stále viac vytlačujú klasické spojitý regulátory.



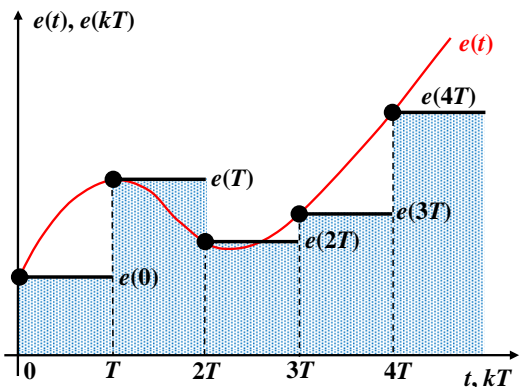
Obr. 20 Spättná obdĺžniková náhrada

### Spättná obdĺžniková náhrada integrálu

Hodnota integrálu sa nahrádza súčtom plôch obdĺžnikov nahrádzajúcich plochu pod pôvodnou spojitou krivkou  $e(t)$  podľa Obr. 20, teda:

$$I(kT) = \int_0^{kT} e(t) dt \approx T \sum_{i=1}^k e(iT)$$

Šírka všetkých obdĺžnikov je rovnaká a je daná periódou vzorkovania  $T$ ; výška  $i$ -teho obdĺžnika je daná hodnotou vzorky  $e(iT)$  v čase  $t = iT$ ,  $i=1, \dots, k$ .



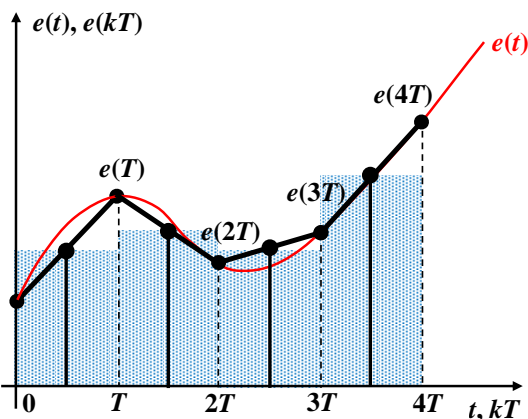
Obr. 21 Dopredná obdĺžniková náhrada

### Dopredná obdĺžniková náhrada integrálu

Hodnota integrálu sa nahrádza súčtom plôch obdĺžnikov nahrádzajúcich plochu pod pôvodnou spojitou krivkou  $e(t)$  podľa Obr. 21, teda:

$$I(kT) = \int_0^{kT} e(t) dt \approx T \sum_{i=0}^{k-1} e(iT)$$

Šírka všetkých obdĺžnikov je opäť daná periódou vzorkovania  $T$ ; výška  $i$ -teho obdĺžnika je daná hodnotou vzorky  $e[(i-1)T]$  v čase  $(i-1)T$ .



Obr. 22 Lichobežníková náhrada

### Lichobežníková náhrada integrálu

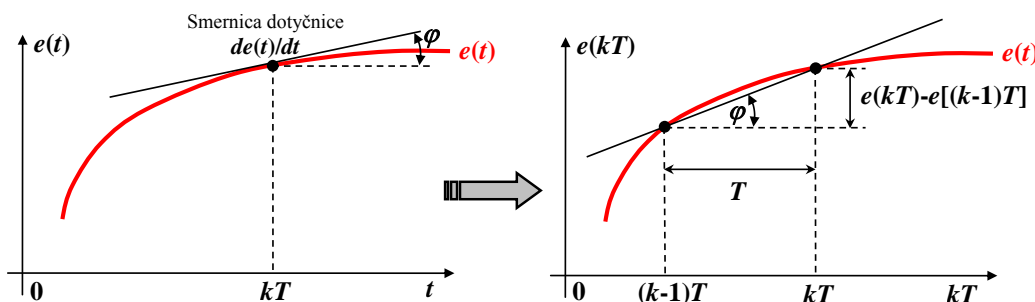
Hodnota integrálu sa nahrádza súčtom plôch lichobežníkov nahrádzajúcich plochu pod pôvodnou spojitou krivkou  $e(t)$  podľa Obr. 22, teda:

$$I(kT) = \int_0^{kT} e(t) dt \approx T \sum_{i=1}^k \frac{e(iT) + e[(i-1)T]}{2}$$

Šírka všetkých lichobežníkov je opäť daná periódou vzorkovania  $T$ ; plocha  $i$ -teho lichobežníka je ekvivalentná ploche obdĺžnika  $T \frac{e(iT) + e[(i-1)T]}{2}$  (pozri Obr. 22)

**Náhrada derivácie**  $de(t)/dt$  v diskretnom časovom okamžiku  $t = kT$  sa obvykle realizuje spätou diferenciou 1. rádu, Obr. 23:

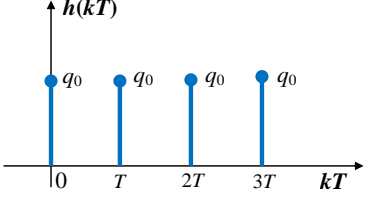
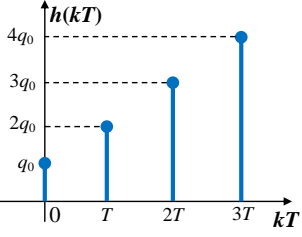
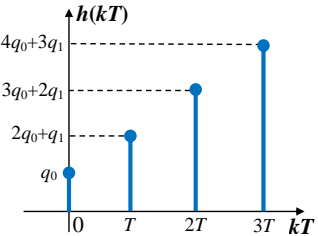
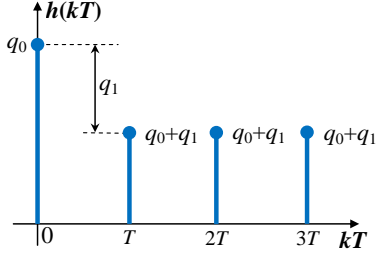
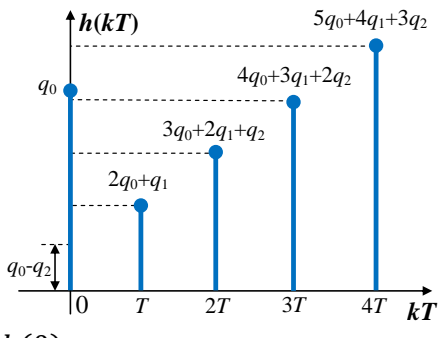
$$D(kT) = \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}$$



Obr. 23 Spättná diferenciacia 1. rádu

Vlastnosti základných typov diskretných regulátorov

tab. 5.2

Typ regul.	Diferenčná rovnica	Z-prenos	Prechodová charakteristika
<b>P</b>	$u(kT) = q_0 e(kT)$ $q_0 > 0$	$G_R(z) = q_0$	 <p style="text-align: center;"><math>h(0) = q_0; h(T) = q_0; h(2T) = q_0 \dots</math></p>
<b>S</b>	$\nabla u(kT) = q_0 e(kT)$ $q_0 > 0$	$G_R(z) = \frac{q_0}{1 - z^{-1}}$	 <p style="text-align: center;"><math>h(0) = q_0; h(T) = 2q_0; h(2T) = 3q_0; \dots</math></p>
<b>PS</b>	$\nabla u(kT) =$ $= q_0 e(kT) + q_1 e[(k-1)T]$ $q_0 > 0; q_0 + q_1 > 0$	$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$	 <p style="text-align: center;"><math>h(0) = q_0; h(T) = 2q_0 + q_1; h(2T) = 3q_0 + 2q_1; \dots</math></p>
<b>PD</b>	$u(kT) =$ $= q_0 e(kT) +$ $+ q_1 e[(k-1)T]$ $q_0 > 0; q_1 < 0;  q_1  < q_0$	$G_R(z) = q_0 + q_1 z^{-1}$	 <p style="text-align: center;"><math>h(0) = q_0; h(T) = h(2T) = h(3T) \dots = q_0 + q_1</math></p>
<b>PSD</b>	$\nabla u(kT) =$ $= q_0 e(kT) +$ $+ q_1 e[(k-1)T] +$ $+ q_2 e[(k-2)T]$ $q_0 > 0$ $2q_0 > -q_1 > q_0$ $q_0 + q_1 + q_2 > 0$ $q_0 - q_2 > 0^*$	$G_R(z) =$ $= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$	 <p style="text-align: center;"> <math>h(0) = q_0</math>  <math>h(T) = 2q_0 + q_1</math>  <math>h(2T) = 3q_0 + 2q_1 + q_2</math>  <math>h(3T) = 4q_0 + 3q_1 + 2q_2</math>  <math>\vdots</math> </p>