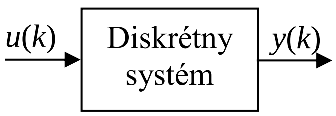
5.4.4. Matematický popis diskrétnych členov

Prakticky rovnaké matematické popisy ako poznáme pre spojité systémy sú aj pre diskrétne systémy, iba namiesto diferenciálnych rovníc používame diferenčné rovnice a namiesto Laplaceovej transformácie používame Z–transformáciu. Zoznámime sa s bežne používanými popismi diskrétnych členov (frekvenčným prenosom a charakteristikou, ktorých používanie nie je pri diskrétnych členoch tak časté ako pri spojitých sa zaoberať nebudeme):

- diferenčná rovnica
- Z–prenos
- impulzná funkcia a charakteristika
- prechodová funkcia a charakteristika
- frekvenčný prenos
- frekvenčná charakteristika

5.4.4.1. Diferenčná rovnica a Z – prenos



Obr. 12

Majme diskrétny systém s jednou vstupnou veličinou $u(k)$ a jednou výstupnou veličinou $y(k)$ podľa Obr. 12. Ako vstupná, tak aj výstupná veličina sú diskrétne časové funkcie. Tento systém môžeme popísať diferenčnou rovnicou so zápornými posunutiami

$$\boxed{y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m)} \quad (5.16)$$

alebo diferenčnou rovnicou s kladnými posunutiami

$$a_n y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \cdots + a_0 y(k) = b_m u(k+m) + \cdots + b_0 u(k) \quad (5.17)$$

V regulačnej technike a v technickej praxi všeobecne sa viac používajú diferenčné rovnice so záporným posunutím. Koeficient a_0 pri hodnote $y(k)$ (v rovniciach so zápornými posunutiami (5.16)) býva štandardne normalizovaný na hodnotu 1, čo umožňuje výhodne určiť riešenie $y(k)$ numerickým spôsobom. Ide o podelenie celej rovnice týmto koeficientom, ak tento nie je jednotkou – pri numerickom riešení potom nie je treba neustále deliť koeficientom a_0.

Tak ako pri lineárnych spojitých systémoch vyjadrujeme ich popis pomocou prenosu v Laplaceovej transformácii, môžeme vlastnosti diskrétnych systémov vyjadriť pomocou **Z–prenosu,** ktorý je definovaný ako **pomer Z–obrazu výstupu a vstupu pri nulových začiatočných podmienkach**

$$\boldsymbol{G(z)} = \frac{Z\{y(kT)\}}{Z\{u(kT)\}} = \frac{\boldsymbol{Y(z)}}{\boldsymbol{U(z)}} \quad (5.18)$$

Z–prenos získame z diferenčnej rovnice (5.16), čo je samozrejme rovnica so zápornými posunutiami podľa vzorca, ktorý je analogický so vzorcom pre prenos spojitého systému z jeho diferenciálnej rovnice

$$\boldsymbol{G(z)} = \frac{\boldsymbol{Y(z)}}{\boldsymbol{U(z)}} = \frac{\boldsymbol{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}}{\boldsymbol{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}} \quad (5.19)$$

Z–prenos $G(z)$ diskrétneho systému zohráva rovnakú úlohu ako prenos (Laplaceov) spojitého systému.

Poznámka 1: Z–prenos môžeme kedykoľvek vynásobením čitateľa a menovateľa najvyššou mocninou z previesť na Z–prenos s kladnými exponentmi.

Príklad 5.8:

Diskrétny regulačný člen je popísaný diferenčnou rovnicou

$$y(k) - 5y(k-1) + 1{,}2y(k-2) = 3{,}5u(k) + 2u(k-1) - 4u(k-2)$$

Určte Z–prenos a preveďte ho na prenos s kladnými exponentmi.

Riešenie: $G(z) = \frac{3{,}5+2z^{-1}-4z^{-2}}{1-5z^{-1}+1{,}2z^{-2}}$ $\qquad$ $G(z) = \frac{3{,}5z^2+2z-4}{z^2-5z+1{,}2}$

Použitie Z–prenosu pre určenie odozvy systému: Analogicky, ako pri prenose spojitých systémov je možné pomocou Z–prenosu určiť Z–obraz výstupu *Y*(*z*) pre daný vstupný signál *u*(*k*) a jemu prislúchajúci Z–obraz *U*(*z*) (za predpokladu, že začiatočné podmienky sú nulové)

$$Y(z) = G(z)U(z) \tag{5.20}$$

a spätnou Z–transformáciou určiť odozvu *y*(*k*)

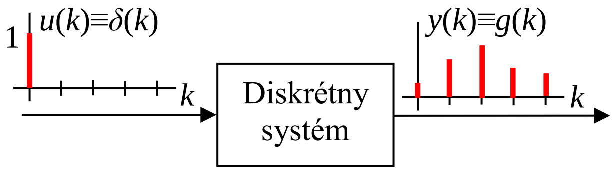
$$y(k) = Z^{-1}\{G(z)U(z)\} \tag{5.21}$$

Poznámka 2: Pri používaní diferenčnej rovnice systému s kladnými posunutiami (5.17) môžeme rovnakým spôsobom ako pri rovnici so zápornými posunutiami odvodiť vzorec pre Z–prenos z tejto rovnice

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} \tag{5.22}$$

5.4.4.2. Impulzná funkcia a charakteristika

Diskrétna impulzná funkcia je odozva systému na jednotkový impulz *δ*(*k*) na vstupe (Obr. 13). Jednotkový impulz *δ*(*k*) bol už definovaný a znázornený (trochu odlišne od definície pre spojité systémy) v príklade 5.1



Obr. 13

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases} \tag{5.23}$$

V operátorovom slovníku Z–transformácie môžeme nájsť, že jeho Z–obraz sa rovná jednej alebo $Z\{\delta(k)\} = 1$. Graf impulznej funkcie je impulzná charakteristika. Pre impulznú funkciu je zavedené označenie *g*(*k*).

Keďže sa Z–obraz jednotkového impulzu rovná jednej $Z\{\delta(k)\} = 1$ vyplýva z definície Z–prenosu

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z\{g(k)\}}{Z\{\delta(k)\}} = Z\{g(k)\} \tag{5.24}$$

kde sme za vstupnú funkciu dosadili jednotkový impulz a za výstupnú funkciu impulznú funkciu, takže **Z–obraz impulznej funkcie sa rovná práve Z–obrazu prenosu.** Potom môžeme napísať, že

$$Z\{g(k)\} = G(z)$$

a teda medzi impulznou funkciou a Z–prenosom je vzťah ako medzi originálom a Z–obrazom. Impulznú funkciu získame zo Z–prenosu spätnou Z–transformáciou

$$\boxed{\boldsymbol{g(k) = Z^{-1}\{G(z)\}}} \tag{5.25}$$

Druhý spôsob ako získať impulznú funkciu je jej výpočet z diferenčnej rovnice systému, do ktorej sa za vstupnú funkciu dosadí jednotkový impulz *δ*(*k*) ako to je ukázané v nasledujúcom príklade.

Príklad 5.9:
Systém je popísaný diferenčnou rovnicou

$$y(k) - 5y(k-1) + 6y(k-2) = 2u(k) - 7u(k-1)$$

Určte impulznú funkciu rôznymi spôsobmi a potom k nej načrtnite impulznú charakteristiku.

Riešenie: Stanovíme Z–prenos a prevedieme ho na tvar s kladnými exponentmi

$$G(z) = \frac{2-7z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}} = \frac{2z^2-7z}{z^2-5z+6}$$

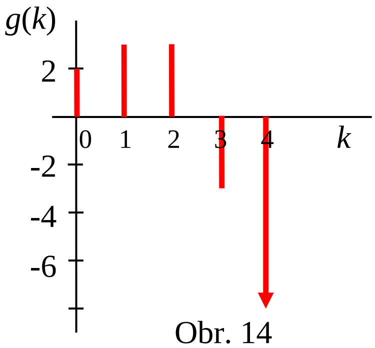
Z $G(z)$ získame $g(k)$ spätnou transformáciou podľa (5.25)
Spätnú Z–transformáciu môžeme urobiť aj delením polynómov čitateľa a menovateľa.

$$(2z^2-7z):(z^2-5z+6) = \underbrace{2}_{\boxed{g(0)}} + \underbrace{3z^{-1}}_{\boxed{g(1)}} + \underbrace{3z^{-2}}_{\boxed{g(2)}} - \underbrace{3z^{-3}}_{\boxed{g(3)}} - \underbrace{33z^{-4}}_{\boxed{g(4)}} + \ \dots$$

$$\underline{-(2z^2 - 10z + 12)}$$
$$0 \ + \ 3z - 12$$
$$\underline{-(3z - 15 + 18z^{-1})}$$
$$0 \ + \ 3 - 18z^{-1}$$
$$\underline{-(3 - 15z^{-1} + 18z^{-2})}$$
$$0 \ - \ 3z^{-1} - 18z^{-2}$$
$$\underline{-(-3z^{-1} + 15z^{-2} - 18z^{-3})}$$
$$0 \quad - 33z^{-2} + 18z^{-3}$$

. . . . atď.

$g(0) = 2$
$g(1) = 3$
$g(2) = 3$
$g(3) = -3$
$g(4) = -33$
…



Obr. 14

Impulzná funkcia je na Obr. 14.

Kontrolu správnosti riešenia môžeme urobiť tak, že do diferenčnej rovnice za $u(k)$ dosadíme $\delta(k)$ a vypočítame $g(k)$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$:

$$\boldsymbol{g(k) - 5g(k-1) + 6g(k-2) = 2\delta(k) - 7\delta(k-1)}$$

$$g(k) = 5g(k-1) - 6g(k-2) + 2\delta(k) - 7\delta(k-1)$$

$k = 0$: $\quad g(0) = 5g(-1) - 6g(-2) + 2\delta(0) - 7\delta(-1) = 2$

$k = 1$: $\quad g(1) = 5g(0) - 6g(-1) + 2\delta(1) - 7\delta(0) = 3$

$k = 2$: $\quad g(2) = 5g(1) - 6g(0) + 2\delta(2) - 7\delta(1) = 3$

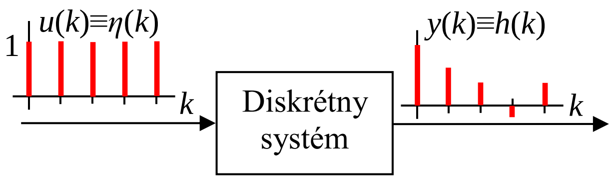
$k = 3$: $\quad g(3) = 5g(2) - 6g(1) + 2\delta(3) - 7\delta(2) = -3$

$k = 4$: $\quad g(4) = 5g(3) - 6g(2) + 2\delta(4) - 7\delta(3) = -33$

5.4.4.3. Prechodová funkcia a charakteristika

Diskrétna prechodová funkcia je odozva systému na jednotkový skok $\eta(k)$ na vstupe (Obr. 15). Jednotkový skok $\eta(k)$ bol už definovaný a znázornený v príklade 5.1

$$\eta(k) = \begin{cases} 1 & k \ge 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad (5.26)$$



Obr. 15

V slovníku Z–transformácie môžeme nájsť, že jeho Z–obraz je $Z\{\eta(k)\} = \frac{z}{z-1}$. Graf prechodovej funkcie je prechodová charakteristika. Pre prechodovú funkciu je zavedené označenie $h(k)$.

Dosadením $\eta(k)$ do definície Z–prenosu dostaneme

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Z\{h(k)\}}{Z\{\eta(k)\}} = \frac{Z\{h(k)\}}{\frac{z}{z-1}} \tag{5.27}$$

keď sme za vstupnú funkciu dosadili jednotkový skok tým výstupná funkcia vyšla ako prechodová funkcia. Zo vzťahu

$$Z\{h(k)\} = \frac{z}{z-1}G(z) \qquad \text{alebo} \qquad \boldsymbol{H(z) = \frac{z}{z-1}G(z)} \tag{5.28}$$

dostaneme vzťah pre získanie prechodovej funkcie zo Z–prenosu

$$\boxed{\boldsymbol{h(k) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}G(z)\right\}}} \tag{5.29}$$

Druhý spôsob ako získať výpočtom prechodovú funkciu je z diferenčnej rovnice systému, podobne ako tomu bolo pri impulznej funkcii. Tu sa za vstupnú funkciu dosadí jednotkový skok $\eta(k)$ ako to bude ukázané v nasledujúcom príklade.

Príklad 5.10:

Systém je popísaný diferenčnou rovnicou

$$y(k) + 0{,}5y(k-1) = u(k) + 2u(k-1)$$

Určte prechodovú funkciu a načrtnite prechodovú charakteristiku.

Riešenie: Určíme Z–prenos vrátane jeho tvaru s kladnými exponentmi

$$G(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+0{,}5z^{-1}} = \frac{z+2}{z+0{,}5}$$

Zo Z–prenosu získame prechodovú funkciu podľa vzťahu (5.29) a to rozkladom na parciálne zlomky a použitím slovníka Z–transformácie

$$h(kT) = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z+2}{z+0{,}5}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z+0{,}5}\right\} = 2-(-0{,}5)^k \qquad \text{pre } k \geq 0$$

Druhá možnosť spätnej Z–transformácie je delenie polynómu čitateľa polynómom menovateľa ($H(z)$)

$$(z^2+2z):(z^2-0{,}5z-0{,}5) = \underbrace{1}_{\boxed{h(0)}} + \underbrace{2{,}5z^{-1}}_{\boxed{h(1)}} + \underbrace{1{,}75z^{-2}}_{\boxed{h(2)}} + \underbrace{2{,}125z^{-3}}_{\boxed{h(3)}} + \ \dots$$

$$\underline{-(z^2-0{,}5z-0{,}5)}$$

$$0 \ + 2{,}5z + 0{,}5$$

$$\underline{-(2{,}5z - 1{,}25 - 1{,}25z^{-1})}$$

$$0 \ + \ 1{,}75 + 1{,}25z^{-1}$$

$$\underline{-(1{,}75 - 0{,}875z^{-1} - 0{,}875z^{-2})}$$

$$0 \ + 2{,}125z^{-1} + 0{,}875z^{-2}$$

. . . . atď.

k	$g(k)$	$h(k)$
0	1	1
1	1,5	2,5
2	−0,75	1,75
3	0,375	2,125
4	−0,187	1,938
5	0,156	2,031
6	−0,047	1,984

Tretia metóda pre získanie prechodovej funkcie je riešenie diferenčnej rovnice, do ktorej za vstupnú funkciu dosadíme $\eta(k)$

$$\boldsymbol{h(k) = \eta(k) + 2\eta(k-1) - 0{,}5h(k-1)}$$

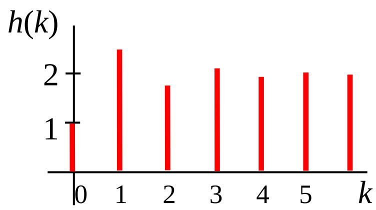
$k = 0$: $\quad h(0) = \eta(0) + 2\eta(-1) - 0{,}5h(-1) = 1$

$k = 1$: $\quad h(1) = \eta(1) + 2\eta(0) - 0{,}5h(0) = 2{,}5$

$k = 2$: $\quad h(2) = \eta(2) + 2\eta(1) - 0{,}5h(1) = 1{,}75$

$k = 3$: $\quad h(3) = \eta(3) + 2\eta(2) - 0{,}5h(2) = 2{,}125$

. . . .



Obr. 16