Delenie polynómu čitateľa polynómom menovateľa vykonávame ako písomné delenie, bude ukázané na príklade.

Ďalším príkladom bude demonštrované hľadanie originálu použitím slovníka Z–transformácie a porovnanie s metódou delenia polynómov.

Príklad 5.4:

Stanovte originál $f(kT)$ k funkcii $F(z) = \frac{z-3}{z^2-z+2}$

Riešenie:

$(z-3):(z^2-z+2) = z^{-1} - 2z^{-2} - 4z^{-3} + 8z^{-5} + \ \dots$

$\boxed{f(T)}$ $\boxed{f(2T)}$ $\boxed{f(3T)}$ $\boxed{f(5T)}$

$\underline{-(z-1+2z^{-1})}$

$0-2-2z^{-1}$

$\underline{-(-2+2z^{-1}-4z^{-2})}$

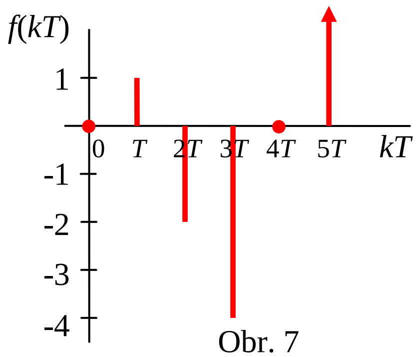
$0-4z^{-1}+4z^{-2}$

$\underline{-(-4z^{-1}+4z^{-2}-8z^{-3})}$

$0 \quad +0 \quad +8z^{-3}$

. . . .

$f(0) = 0$
$f(T) = 1$
$f(2T) = -2$
$f(3T) = -4$
$f(4T) = 0$
$f(5T) = 8$
....



Obr. 7

Grafické znázornenie funkcie $f(kT)$ je na Obr. 7

Príklad 5.5:

Stanovte originál $f(kT)$ k funkcii $F(z) = -\frac{z}{z+2} + \frac{5z}{z+3} - \frac{4z}{z+4}$

Podľa slovníka Z–transformácie v tab. 5.1 je

$$Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = a^k$$

a teda originál k $F(z)$ je

$$f(kT) = -(-2)^k + 5(-3)^k - 4(-4)^k$$

ktorý platí všeobecne pre $k \geq 0$. Poznámka v slovníku $(a > 0)$ platí pre spojité funkcie, kde je $\lg a$.

k	0	1	2	3	4	...
$f(kT)$	0	3	–23	129	...	...

Vykonajme ešte kontrolu delením čitateľa menovateľom. Menovateľ je

$$(z-2)(z-3)(z-4) = z^3 + 9z^2 + 26z + 24$$

$(3z^2+4z):(z^3+9z^2+26z+24) = 3z^{-1} - 23z^{-2} + 129z^{-3} + \ \dots$

$\boxed{f(T)}$ $\boxed{f(2T)}$ $\boxed{f(3T)}$

$\underline{3z^2+27z+78+72z^{-1}}$

$0 \quad -23z-78-72z^{-1}$

$\underline{-23z-207-598z^{-1}-552z^{-2}}$

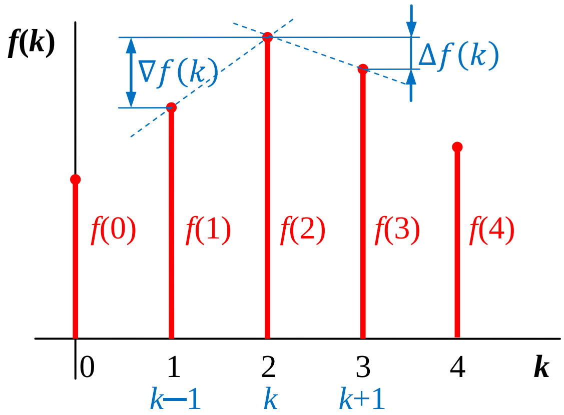
$0 \quad +129+526z^{-1}+552z^{-2}$

$f(0) = 0$
$f(T) = 3$
$f(2T) = -23$
$f(3T) = 129$
$f(4T) = \dots$

5.4.3. Diferenčné rovnice

Tak ako základným tvarom matematického popisu spojitých systémov sú diferenciálne rovnice, tak základom matematického popisu diskrétnych systémov sú **diferenčné rovnice**.

V minulých kapitolách bol zavedený pojem diskrétna funkcia $f(kT)$, čo je postupnosť diskrétnych hodnôt $f(0)$, $f(T)$, $f(2T)$, … v ekvidištantných časových okamžikoch $t = kT$, kde $k = 0, 1, 2,$ … atď. V diferenčných rovniciach budeme bez vplyvu na všeobecnosť predpokladať $T = 1$ [s] a diskrétny čas bude k namiesto kT. Postupnosť diskrétnych funkčných hodnôt teda bude $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, … atď., pozri Obr. 8.



Obr. 8

Základom diferenčných rovníc je pojem **diferencia funkcie** (tu už máme stále na mysli diskrétnu funkciu). Prvá diferencia je daná rozdielom dvoch susedných diskrétnych hodnôt. Pritom môžeme použiť dva spôsoby definovania diferencií, a to ako *doprednú* diferenciu alebo ako *spätnú diferenciu*, Obr. 8:

dopredná diferencia $\qquad\qquad$ spätná diferencia

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) \qquad\qquad \nabla f(k) = f(k) - f(k-1) \tag{5.9}$$

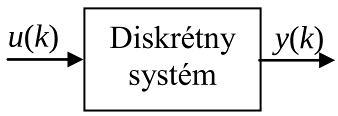
V obidvoch prípadoch je prvá diferencia analógiou prvej derivácie pri spojitých funkciách (určuje rýchlosť zmeny funkcie a geometricky je to smernica dotyčnice). Druhá diferencia (dopredná aj spätná) je určená vzťahom

$$\Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k) \qquad\qquad \nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1) \tag{5.10}$$

a môžeme ju vyčísliť z funkčných hodnôt

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(k) &= f(k+2) - f(k+1) - f(k+1) + f(k) = f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) \\ \nabla^2 f(k) &= f(k) - f(k-1) - (f(k-1) - f(k-2)) = f(k) - 2f(k-1) + f(k-2) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Postupne môžeme zaviesť vyššie diferencie a vždy je možné ich vyčísliť funkčnými hodnotami (pritom platí, že rád diferencie je rovný najvyššiemu posunutiu funkčných hodnôt).



Obr. 9

Lineárnu diferenčnú rovnicu diskrétneho systému podľa Obr. 9 n-tého rádu s konštantnými koeficientmi a s pravou stranou môžeme napísať v tzv. **diferenčnom tvare** s doprednými diferenciami

$$\alpha_n \Delta^n y(k) + \cdots + \alpha_1 \Delta y(k) + \alpha_0 y(k) = \beta_m \Delta^m u(k) + \cdots + \beta_1 \Delta u(k) + \beta_0 u(k) \tag{5.12}$$

a spätnými diferenciami

$$\alpha_n \nabla^n y(k) + \cdots + \alpha_1 \nabla y(k) + \alpha_0 y(k) = \beta_m \nabla^m u(k) + \cdots + \beta_1 \nabla u(k) + \beta_0 u(k) \tag{5.13}$$

kde $\quad u(k)$ je známa vstupná diskrétna funkcia systému
$\quad\quad\;\; y(k)$ je hľadaná výstupná diskrétna funkcia systému.

Ak v týchto diferenčných rovniciach nahradíme diferencie ich funkčnými hodnotami podľa vzťahov (5.11) … atď., dostaneme **rekurentný[1] tvar** diferenčnej rovnice

z dopredných diferencií

$$\boxed{a_n y(k+n) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_m u(k+m) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)} \quad (5.14)$$

zo spätných diferencií

$$\boxed{a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_m u(k-m)} \quad (5.15)$$

Diferenčná rovnica z dopredných diferencií (5.14) je uvádzaná ako **diferenčná rovnica s kladnými posunutiami**. Začiatočné podmienky sú tu dané funkčnými hodnotami $y(0), y(1), \ldots\ y(n-1)$. Tento tvar je bežný v matematickej literatúre, ale v technických disciplínach sa používa a je výhodnejší druhý tvar (5.15) zo spätných diferencií, ktorý sa nazýva tvar diferenčnej rovnice **so zápornými posunutiami.** Začiatočné podmienky sú tu dané postupnosťou hodnôt $y(-1), y(-2), \ldots\ y(-n)$ a tieto sú väčšinou nulové.

Teraz si ukážeme, ako sa diferenčné rovnice riešia. Bežné a v praxi používané je **numerické**, niekedy nazývané **rekurentné**, riešenie diferenčných rovníc.

Príklad 5.6:

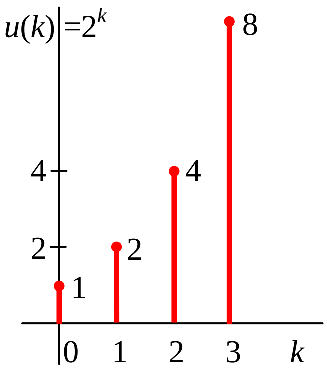
Riešte numericky diferenčnú rovnicu (kladné posunutia)

$$y(k+3) + 4y(k+2) - 0{,}5y(k+1) + 3y(k) = 6u(k+1) - 2u(k)$$

Pretože ide o diferenčnú rovnicu tretieho rádu, sú zadané tri začiatočné podmienky

$$y(0) = 1;$$
$$y(1) = 3;$$
$$y(2) = 4$$

a funkcia na pravej strane rovnice (vstupná funkcia) $u(k) = 2^k$ (Obr.10)



Obr. 10

Riešenie: Rovnicu upravíme tak, aby na ľavej strane bola hodnota výstupnej funkcie *y* s najväčším posunutím. Riešenie alebo postupnosť hodnôt $y(k)$ potom vypočítame postupným dosadzovaním $k = 0, 1, 2, \ldots$ atď. pre ľubovoľný počet hodnôt.

$$y(k+3) = -4y(k+2) + 0{,}5y(k+1) - 3y(k) + 6u(k+1) - 2u(k)$$

Začiatočné podmienky: $y(0) = 1;$ $y(1) = 3;$ $y(2) = 4$

k=0:

$$\begin{aligned} y(3) &= -4y(2) + 0{,}5y(1) - 3y(0) + 6u(1) - 2u(0) = \\ &= -4 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = \\ &= -7{,}5 \end{aligned}$$

k=1:

$$\begin{aligned} \mathrm{y}(4) &= -4\mathrm{y}(3) + 0{,}5\mathrm{y}(2) - 3\mathrm{y}(1) + 6\mathrm{u}(2) - 2\mathrm{u}(1) = \\ &= -4 \cdot (-7{,}5) + 0{,}5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = \\ &= 43 \end{aligned}$$

k=2:

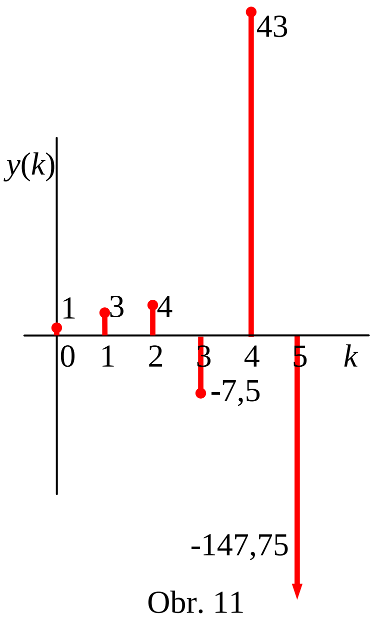
[1] vracajúci sa, zvratný, návratný; vedúci dozadu

$$\begin{aligned}y(5) &= -4y(4) + 0{,}5y(3) - 3y(2) + 6u(3) - 2u(2) = \\ &= -4 \cdot 43 + 0{,}5 \cdot (-7{,}5) - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = \\ &= -147{,}75\end{aligned}$$

. . . . atď.

Graf riešenia je na Obr. 11.

Poznámka: Riešenie nedostávame v uzavretom tvare. Postup je veľmi ľahko algoritmizovateľný a previediteľný do programu.



Obr. 11

Príklad 5.7:

Riešte numericky diferenčnú rovnicu (záporné posunutia)

$$y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = 0{,}5u(k) - u(k-1)$$

pre vstupnú funkciu $u(k) = \sin k$ pre $k \geq 0$ a pre nulové začiatočné podmienky $y(-1) = y(-2) = 0$.

Riešenie: Vyjadríme na ľavej strane rovnice člen s „najmenším“ posunutím

$$y(k) = 2y(k-1) - y(k-2) + 0{,}5u(k) - u(k-1)$$

a postupne dosadzujeme $k = 0, 1, 2, \ldots$ a dostávame riešenie diferenčnej rovnice

$k = 0$: $y(0) = 2y(-1) - y(-2) + 0{,}5u(0) - u(-1) = 2 \cdot 0 - 0 + 0{,}5 \cdot 0 = 0$

$k = 1$: $y(1) = 2y(0) - y(-1) + 0{,}5u(1) - u(0) = 2 \cdot 0 - 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}84 - 0 = 0{,}42$

$k = 2$: $y(2) = 2y(1) - y(0) + 0{,}5u(2) - u(1) = 2 \cdot 0{,}42 - 0 + 0{,}5 \cdot 0{,}91 - 0{,}84 = 0{,}455$

. . . . atď.