5.4. ČÍSLICOVÉ (DISKRÉTNE) RIADENIE

5.4.1. Diskrétny regulačný obvod

Spojité riadenie sa bez problémov používalo do doby, kedy bol počas druhej svetovej vojny vynájdený rádiolokátor pre zisťovanie polohy lietadiel. Poloha lietadla je veličina, ktorá sa mení úplne spojito v priestore aj čase. Ak ju ale meriame rádiolokátorom, javí sa ako nespojitá veličina, ktorej hodnotu poznáme iba v určitých periodicky sa opakujúcich okamžikoch. A ak sa riadi zameranie protilietadlového kanónu, je vstupná riadiaca informácia nespojitá (v ďalšom budeme hovoriť **diskrétna**) veličina. A tu práve končí použitie spojitého riadenia a nastupuje riadenie diskrétne. Regulačný obvod musíme vyšetrovať ako **diskrétny regulačný obvod.**

V dnešnej dobe je dôvod vyšetrovania regulačných obvodov ako diskrétnych ale niekde inde. Je to **použitie počítača vo funkcii regulátora**. Zatiaľ sme hovorili o spojitých PID regulátoroch, ktorých hardvérovým základom bol operačný zosilňovač a ktoré pracovali úplne spojito. Regulovaná veličina – respektíve regulačná odchýlka – vstupujúca do regulátora bolo spojito sa meniace napätie, to bolo v regulátore zosilňované, derivované, integrované a výstupná akčná veličina bolo spojito sa meniace napätie, zosilnené vo výkonovom zosilňovači poháňalo servomotor atď. V spojitom regulačnom obvode existovalo trvalé spojenie medzi spojitým priebehom regulovanej veličiny $y(t)$ a na nej závislým priebehom akčnej veličiny $u(t)$. Táto nepretržitosť a trvalosť sledovania nie je ale nutná. Počítač dokáže nahradiť regulátor s tranzistorovým zosilnením, derivovaním, integrovaním, ale jeho vstup nemôže byť spojito sa meniace napätie, zodpovedajúce regulovanej veličine. Musíme predradiť analógovo-digitálny prevodník a tak do počítača vstupuje už postupnosť impulzov – numerických hodnôt, a to už je diskrétna veličina. Regulátor – počítač je schopný pracovať tak, že regulovanú veličinu y zisťuje iba v určitých okamžikoch a iba v týchto okamžikoch počíta hodnotu akčnej veličiny u. Z počítača vystupuje opäť postupnosť impulzov (opäť diskrétna veličina), ktoré musia byť nejako pretvorené na spojitú veličinu, ktorá môže otáčať servomotorom, a tým zasahovať do regulovanej sústavy. A použitie počítača vo funkcii regulátora je hlavný dôvod prečo prechádzame od spojitého riadenia ku riadeniu diskrétnemu.

Špecializované počítače a celé počítačové systémy nasadzované v regulačnej technike plnia prevažne funkciu regulátora, ale často zaisťujú súčasne aj ďalšie funkcie – ochranné, signalizačné, vizualizačné, registračné a pod. Výhodou týchto riešení je relatívne nízka cena, spoľahlivosť, možnosť prepojenia do priemyselných počítačových sietí, komunikácia prakticky bez skreslenia informácie aj na veľké vzdialenosti, takmer neobmedzená zložitosť riadiacich algoritmov a možnosť veľmi rýchlej zmeny ich parametrov.

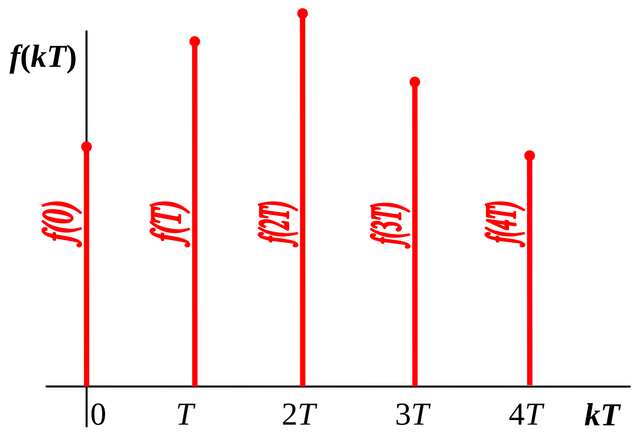
Diskrétne regulačné obvody sú také, v ktorých aspoň jeden člen pracuje diskrétne, teda informáciu prijíma alebo vydáva, eventuálne oboje, v **diskrétnych časových okamžikoch** (spravidla rovnomerných – ekvidištantných). Inými slovami, **aspoň jedna veličina obvodu má tvar postupnosti diskrétnych hodnôt.**

Túto vlastnosť má rad technických zariadení akými sú impulzné obvody, číslicové počítače, atď. Okrem tohto skutočného diskrétneho výstupu sú diskrétne aj svojou podstatou spojité veličiny, ktoré nemôžu byť merané spojito. Sú to už spomenuté polohy objektov, merané rádiolokátormi. Alebo veličiny, ktorých hodnoty sú prenášané diaľkovým prenosom s diskrétnym charakterom a pod. Dnes však najčastejším prípadom diskrétneho systému riadenia je **použitie číslicového počítača ako regulátora v systéme automatického riadenia.**

Skôr ako sa dostaneme k diskrétnemu regulačnému obvodu, zavedieme si pojem diskrétna funkcia. **Diskrétna funkcia *f*(*kT*)** je charakterizovaná postupnosťou hodnôt *f*(0), *f*(*T*), *f*(2*T*), … v tzv. vzorkovacích okamžikoch, tzn. v čase *t* = 0, *T*, 2*T*, … (Obr. 1). Mimo časové okamžiky vzorkovania nie je funkcia *f*(kT) definovaná – nie je informácia o hodnote príslušnej veličiny, iba v uvedených časových okamžikoch. Časové okamžiky, v ktorých je funkcia *f*(*kT*) definovaná sú ekvidištantné $t = kT$, kde k = 0, 1, 2, … Čas $t = kT$ sa nazýva diskrétny čas a zápisom funkcie *f*(*kT*) je na prvý pohľad jasné, že ide o diskrétnu časovú funkciu. Hodnota *T* sa nazýva **vzorkovacia perióda,** má rozmer [s] a je vzťahom

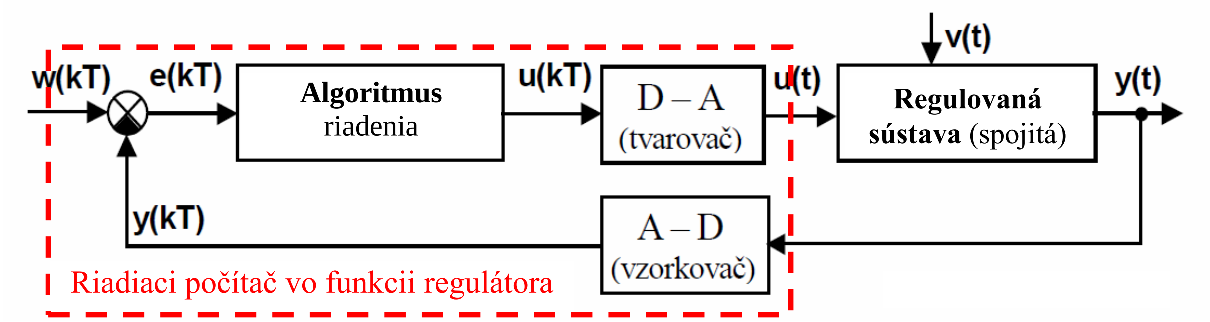
$$\omega_v = \frac{2\pi}{T} \tag{5.1}$$

viazaná so **vzorkovacou frekvenciou.**



Obr. 1

Bloková schéma diskrétneho regulačného obvodu je na Obr. 2. Ide o najbežnejší typ regulačného obvodu, kedy je regulovaná spojitá sústava, teda máme spojitú regulovanú veličinu *y*(*t*). Tá je prostredníctvom analógovo-digitálneho prevodníka (v regulačnej technike nazývaný **vzorkovač**) vzorkovaná s periódou *T* a prevedená do číslicového tvaru, tzn. na diskrétnu funkciu *y*(*kT*). Počítač vypočíta zo vstupnej riadiacej veličiny *w*(*kT*), ktorá je už



Obr. 2

pochopiteľne zadávaná v číslicovom tvare a z *y*(*kT*) regulačnú odchýlku *e*(*kT*) a vlastný riadiaci algoritmus počítača určí hodnotu akčného zásahu *u*(*kT*). Táto hodnota je digitálno-analógovým prevodníkom (v regulačnej technike nazývaný **tvarovač**) prevedená na spojitý signál *u*(*t*), ktorý prostredníctvom regulačného orgánu pôsobí na regulovanú sústavu.

Počítačom vo funkcii regulátora, ich algoritmom a spôsobom, ako nahrádzajú spojité regulátory (ako vykonávajú zosilňovanie, integráciu a deriváciu vstupnej regulačnej odchýlky) bude venovaná celá jedna kapitola. Teraz sa budeme venovať dvom novým členom regulačného obvodu, ktoré nepoznáme zo spojitých obvodov a to sú vzorkovač a tvarovač.

Vzorkovač a vzorkovanie. Vzorkovač vykonáva periodické snímanie hodnoty vstupnej veličiny – napr. regulovanej veličiny *y*. Jej hodnotu odoberá v pravidelných intervaloch vo forme vzoriek a medzi dvoma odbermi ho priebeh tejto veličiny nezaujíma. V schémach sa vzorkovač, inak analógovo-digitálny prevodník, znázorňuje ako spínač – je to na Obr. 3, z ktorého je tiež zrejmý princíp vzorkovania regulovanej veličiny *y*.

Takto popísaný princíp riadenia nazývame **diskrétne** podľa vlastnosti, že po väčšinu doby nie je vzorkovaná regulovaná veličina vôbec sledovaná a regulátor neprestavuje akčnú veličinu, takže riadenie je „skryté, utajené, diskrétne“ a rovnako tak príslušné veličiny sú „skryté, utajené, diskrétne“.

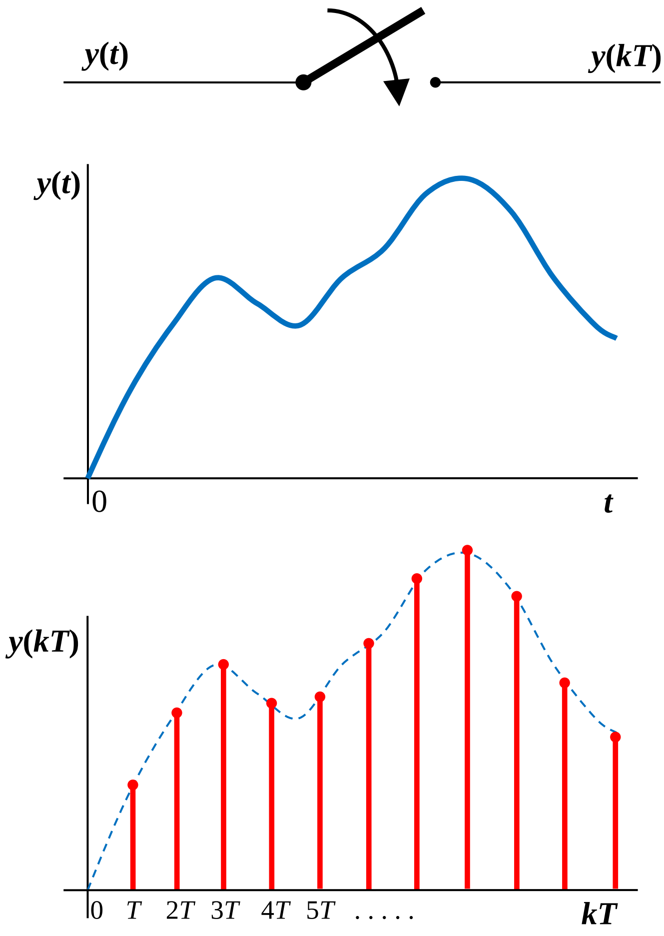
Základnou otázkou diskrétneho riadenia je **dĺžka periódy vzorkovania *T***, čiže akú dlhú dobu môže byť regulovaná veličina bez sledovania a regulovaná sústava bez akčného zásahu.

Intuitívne cítime, že čím je regulovaná sústava „pomalšia“ (presnejšie: čím má dlhšie časové konštanty), tým bude dlhšia aj perióda vzorkovania. Ak budeme riadiť kormidlom kurz zaoceánskej lode, je regulovaná sústava („loď“) pomalá sústava s dlhými časovými konštantami a môžeme si dovoliť pri návrhu automatického diskrétneho riadenia voliť dlhú vzorkovaciu periódu.

Z tejto úvahy vychádzajú rôzne empirické vzorce, ktoré pomáhajú pri rýchlej voľbe vzorkovacej periódy. Podľa nich sa napr. k regulovanej sústave s prenosom

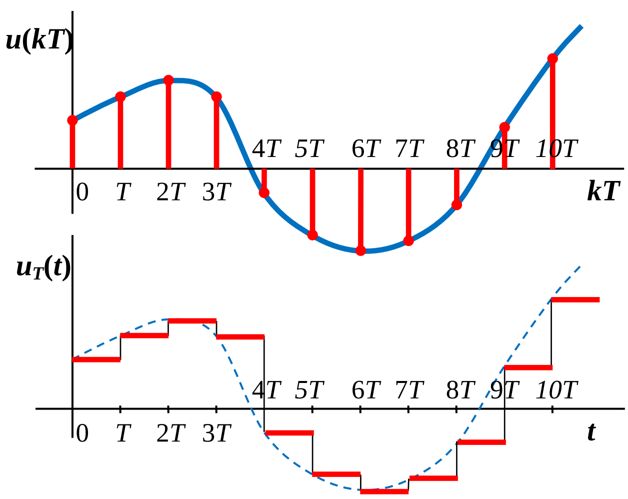
$$G(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)\ \ldots}$$

volí vzorkovacia perióda $T \cong 0{,}5\tau_{min}$
alebo $T \cong \left(\frac{1}{4}\,až\,\frac{1}{2}\right)\sum \tau_i$ resp. pri sústavách s dopravným oneskorením je vzorkovacia perióda volená v závislosti na dopravnom oneskorení T_D tiež určitými empirickými vzťahmi.



Obr. 3

Tvarovač a tvarovanie. Ak pôsobí diskrétny signál (konkrétne akčný zásah $u(kT)$) ako vstupná veličina do spojitej regulovanej sústavy, je potrebné ho upraviť – tvarovať. Diskrétny signál totiž obsahuje rad nekonečne krátkych impulzov, ktorých amplitúda je nositeľom informácie, v žiadnom prípade však energie, ktorú by mohol odovzdávať nasledujúcemu členu obvodu. Tvarovanie diskrétneho signálu je v podstate jeho premena na spojitý signál (aspoň po častiach spojitý). Tento signál potom musí byť schopný odovzdávať nasledujúcemu členu jednak informáciu a jednak potrebnú energiu.



Obr. 4

Väčšinou sa používa **tvarovač nultého rádu** a ďalej sa zameriame iba na tento typ tvarovača. Výstupná úroveň signálu tvarovača je počas celej doby periódy *T* konštantná a je rovná amplitúde vstupného impulzu, privedeného na počiatku tejto periódy. Je to schodová (stupňová) funkcia a princíp tvarovača je zrejmý z Obr. 4. Prenos tohto tvarovača je daný vzťahom

$$G_T(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \tag{5.2}$$

5.4.2. Z–transformácia

Z–transformácia je matematický aparát, ktorý využívame predovšetkým pri popise, analýze a syntéze diskrétnych regulačných systémov. Má tu rovnakú funkciu ako Laplaceova transformácia pri spojitých systémoch.

Laplaceov obraz spojitej funkcie *f*(*t*) je daný vzťahom (5)

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Ak vzorkujeme túto funkciu vzorkovačom s periódou *T* dostaneme diskrétnu funkciu *f*(*kT*) a jej Laplaceov obraz získame rovnako, ale musíme prejsť od integrálu k sume

$$L\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT} \tag{5.3}$$

Ak zavedieme novú premennú „*z*“ vzťahom

$$z = e^{sT} \tag{5.4}$$

definuje nám tento vzťah Z–obraz (na pravej strane zmizlo *s*, je to funkcia novej premennej *z*)

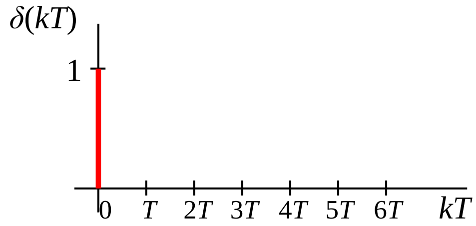
$$\boxed{\boldsymbol{F(z) = Z\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \ \dots}} \tag{5.5}$$

Zdôraznime, že Z–obraz definovaný týmto vzťahom je iba pre diskrétne funkcie a nie je ho možné použiť pre spojité funkcie.

Príklad 5.1:

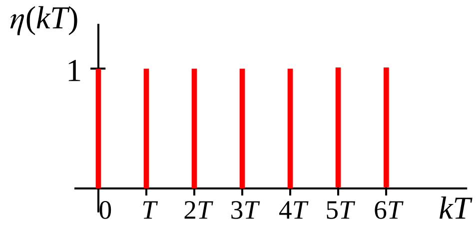
Určte Z–obraz

a) jednotkového diskrétneho impulzu $\delta(kT)$,
b) jednotkové diskrétnej skokovej funkcie $\eta(kT)$,
c) diskrétnej funkcie, ktorú získame vzorkovaním spojitej funkcie $f(t) = e^{-2t}$ so vzorkovacou periódou *T*.



Obr. 5

Riešenie: Definícia a znázornenie jednotkového diskrétneho impulzu $\delta(kT)$ je na Obr. 5 a jednotkovej diskrétnej skokovej funkcie $\eta(kT)$ na Obr. 6. Obe tieto funkcie sú veľmi dôležité a budeme ich stále potrebovať, je preto dobré si ich definície zapamätať. Teraz použijeme definičný vzťah Z–obrazu (5.5) a Z–obraz týchto funkcií vypočítame.



Obr. 6

V prípade týchto funkcií ide o nekonečný geometrický rad, v ktorom každý nasledujúci člen radu dostaneme z predošlého vynásobením kvocientom *q*. Ak má tento rad prvý člen a_0 a kvocient *q*, je jeho súčet daný vzťahom $S = \frac{a_0}{1-q}$.

a) $Z\{\delta(kT)\} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$

b) $Z\{\eta(kT)\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

c) $Z\{e^{-2kT}\} = 1 + e^{-2T}z^{-1} + e^{-4T}z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-2T}}$

Rovnako ako pri Laplaceovej transformácii sa výpočet Z–obrazov nevykonáva výpočtom podľa definičného vzťahu (5.5), ako tomu bolo pri týchto príkladoch, ale sa používa slovník Z–transformácie. V slovníku Z–transformácie sú obdobne ako v slovníku Laplaceovej transformácie diskrétne funkcie $f(kT)$ a príslušný Z–obraz $F(z)$. Ale súčasne tam sú v jednom riadku tiež zodpovedajúca spojitá funkcia $f(t)$, z ktorej sa vzorkovaním diskrétna funkcia získala a jej Laplaceov obraz $F(s)$. To, ako uvidíme, bude často veľmi užitočné. Taký základný slovník je v tab. 5.1.

Príklad 5.2:

Použitím slovníka Z–transformácie určte Z–obraz diskrétnej funkcie $f(kT)$, ktorá vznikne vzorkovaním spojitej funkcie $f(t) = t.e^{-2t}$, ak je táto vzorkovaná vzorkovačom so vzorkovacou periódou $T = 2$ [s].

Riešenie: Obraz diskrétnej funkcie ktorá vznikne vzorkovaním spojitej funkcie $f(t) = t.e^{-2t}$ je podľa slovníka

$$F(z) = \frac{Tze^{-2T}}{(z - e^{-2T})^2}$$

Ak dosadíme $T = 2$ je

$$F(z) = \frac{2ze^{-4}}{(z - e^{-4})^2} = \frac{0{,}037z}{z^2 - 0{,}037z + 0{,}00034}$$

Poznámka 1: Všimnite si, že po dosadení konkrétnej hodnoty T je Z–obraz vždy racionálna lomená funkcia premennej z.

Slovník Z transformácie tých najpoužívanejších funkcií tab. 5.1

	f(*t*)	*F*(*s*)	*f*(*kT*)	*F*(*z*)
1	$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$	1
2	$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\eta(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{zT}{(z-1)^2}$
4	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{z(z+1)T^2}{2(z-1)^3}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	kTe^{-akT}	$\frac{zTe^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
7	$a^{\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s-\frac{\lg a}{T}}$	a^k	$\frac{z}{z-a} \quad (a > 0)$
8	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega kT$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$
9	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega kT$	$\frac{z^2 - z\cos\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$

Príklad 5.3:

Určte Z–obraz diskrétnej funkcie, ktorá vznikne vzorkovaním spojitej funkcie, ktorej Laplaceov obraz je $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$.

Riešenie: Rozložíme funkciu $F(s)$ na súčet parciálnych zlomkov

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

a použitím slovníka určíme Z–obraz

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{zTe^{-T}}{(z-e^{-T})^2}$$

Poznámka 2: Ak budeme v budúcnosti v podobných prípadoch používať skrátené označovanie $Z\{F(s)\}$ čo v tomto prípade je

$$Z\left\{\frac{1}{s(s+1)^2}\right\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{zTe^{-T}}{(z-e^{-T})^2}$$

znamená to určenie Z–obrazu $F(z)$ diskrétnej časovej funkcie $f(kT)$, ktorá vznikla vzorkovaním s periódou T spojitej funkcie $f(t)$, ktorej Laplaceov obraz je $F(s)$. Správne zapísané je to takto

$$\boxed{\boldsymbol{Z\{F(s)\} = Z\left\{V\left\{L^{-1}\{F(s)\}\right\}\right\}}} \tag{5.6}$$

kde operácia V{ } predstavuje vzorkovanie s periódou T. Samozrejme pre toto hľadanie „Z–obrazu k Laplaceovmu obrazu“ je výhodný slovník Z–transformácie so spojitou funkciou a jej L–obrazom na jednom riadku.

Pri spätnej transformácii hľadáme k danému obrazu $F(z)$ originál, teda diskrétnu časovú funkciu $f(kT)$ a toto symbolicky vyjadrujeme zápisom

$$f(kT) = Z^{-1}\{F(z)\}$$

Spätnú transformáciu môžeme vykonávať použitím slovníka Z–transformácie (všeobecne je nutné najprv vykonať rozklad na súčet parciálnych zlomkov) alebo numericky delením polynómu čitateľa polynómom menovateľa. Tento spôsob si teraz vysvetlíme.

Ak je Z–obraz $F(z)$ daný v tvare zlomku

$$F(z) = \frac{M(z)}{N(z)} \tag{5.7}$$

môžeme urobiť delenie polynómu $M(z)$ polynómom $N(z)$ a získať mocninový rad v tvare

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots \tag{5.8}$$

Porovnaním tohto radu s definičným vzťahom Z–obrazu (5.5)

$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \ \dots$$

vidíme, že koeficienty mocninového radu (5.8) sú priamo hodnoty diskrétnej funkcie $f(kT)$

$$f(0) = f_0; \qquad f(T) = f_1; \qquad f(2T) = f_2; \quad \dots$$

Čiastočnou nevýhodou tejto metódy je, že originál dostaneme v tzv. „otvorenom“ tvare, ako postupnosť numerických hodnôt. Niekedy by sa nám táto originálna funkcia hodila skôr v tzv. „uzavretom“ tvare, ako algebrický výraz. Výhodou metódy zas naopak je, že pri výpočte napr. impulzných alebo prechodových funkcií získame tieto konkrétne numericky a to je väčšinou požadované.